

不断演进的数学概念

——函数概念的演变

函数概念是数学中最基本的概念之一，但它不像算术产生于远古时代，函数概念的产生非常晚，至今只有三百余年历史。函数概念的演变大体上可分为萌芽阶段、形成阶段、成熟阶段、近代阶段和现代阶段等五个阶段。

在公元十六世纪之前，数学上占统治地位的是常量数学，其特点是用孤立、静止的观点去研究事物。具体的函数在数学中比比皆是，但没有一般的函数概念。十六世纪，随着欧洲过渡到新的资本主义生产方式，迫切需要天文知识和力学原理。当时，自然科学研究的中心转向对运动、对各种变化过程和变化着的量之间依赖关系的研究。数学研究也从常量数学转向了变量数学。数学的这个转折主要是由法国数学家笛卡尔完成的，他在《几何学》一文中首先引入变量思想，称为“未知和未定的量”，同时引入了两个变量之间的相依关系。这便是函数概念的萌芽。十七世纪，在对各种各样运动的研究中，人们愈来愈感到需要有一个能准确表示各种量之间关系的数学概念。经过深思熟虑，人们从笛卡尔的变量思想中得到启示，从而引出了函数概念。据考证，十七世纪中叶，微积分的创始人之一德国数学家莱布尼兹最先使用函数(function)这个名词。不过，他指的是变数 x 的幂 x^2, x^3, \dots 等等。后来才逐步扩展到多项式函数、有理函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数以及由它们的四则运算、各种复合所形成的初等函数。这些函数都是具体的，都有解析表达式，并且和曲线紧密联系在一起。那时的函数就是表示任何一个随着曲线的点的变动而变化的量。至此，还没有函数的一般定义。

十八世纪初，贝努利最先摆脱具体的初等函数的束缚，给函数一个抽象的不用几何形式的定义：“一个变量的函数是指由这个变量和常量的任何一种方式构成的一个量。”欧拉则更明确地说：“一个变量的函数是该变量和常数以任何一种方式构成的解析表达式。”函数之间的原则区别在于构成函数的变量与常量的组合方式的不同。欧拉最先把函数的概念写进了教科书。在贝努利和欧拉看来，具有解析表达式是函数概念的关键所在。

1734年，欧拉用记号 $y=f(x)$ 表示变量 x 的函数，其中的“ f ”取自“function”的第一个字母。

十八世纪中期，由于偏微分方程中的弦振动问题引起了关于函数概念的争论，迫使数学家接受一个更广泛的概念。1755年欧拉给函数下了一个新的定义：如果某些量这样地依赖于另一些量，当后者改变时它经常变化，那么称前者为后者的函数。

法国数学家傅立叶的工作更广泛地展现了函数究竟是什么的问题，他的工作动摇了十八世纪的信念，那种视函数仅为解析式的观点作为揭示函数关系真谛的巨大障碍终于排除了。

十九世纪 20 年代，微积分严格理论的奠基者柯西的函数概念，可以说是现代函数概念的基础，他认识到函数是变量与变量之间的一种关系，但不足之处是仍然没有摆脱“表达式”之说。

1837 年，德国数学家狄利克莱在总结柯西和罗巴切夫斯基工作的基础上，给出至今最常用的函数定义：如果对于给定区间上的每一个 x 的值都有唯一的一个 y 值与它对应，那么 y 就是 x 的一个函数。至于在整个区间上 y 按照一种还是多种规律依赖于 x ，或者 y 依赖于 x 是否可用数学运算来表达，那都是无关紧要的。

十八世纪以来，随着微积分的发展，函数概念不断变化，经过二百多年的演变，函数概念逐步清晰与稳定。引入了映射概念，其一般定义为：设集合 X 、 Y ，如果 X 中每一个元素 x 都有 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应，那么我们就把此对应叫做从集合 X 到集合 Y 的映射。记作 $f: X \rightarrow Y, y=f(x)$ 。

二十世纪初， $G \cdot H \cdot$ 哈代更明确指出：函数的本质属性在于： y 和 x 之间存在某种关系，使得 y 的值总是对应着某些 x 的值。

随后， $O \cdot$ 维布伦用集合定义了变量与函数。“变量是代表某个集合中任一元素的记号。”“变量 y 的集合与另一个变量 x 的集合之间，如果存在着对于 x 的每一个值， y 有确定的值与之对应，那么 y 叫做 x 的函数。”这个定义比此前的定义更合理、更确切，这是一个比较完整的函数概念。

1939 年， $N \cdot$ 布尔巴基用集合之间的映射定义了函数：

“设 E 和 F 是两个集合， E 中的每一个变元 x 和 F 中的每一个变元 y 之间的一个关系 f 称为函数，如果对每一个 $x \in E$ ，都存在唯一的 $y \in F$ ，它们满足给定的关系。”记作 $f: E \rightarrow F$ ，或者记作 $E \xrightarrow{f} F$ 。

在布尔巴基的定义中， E 和 F 不一定是数的集合。他强调函数是集合之间的一个映射。因此，他所定义的函数更加广泛。

现在常用的函数概念，也是中学数学中的函数概念，把变量局限于实数范围：

设 x 表示某数集 D 中的变元。对 D 中每一个 x ，按一定的法则有唯一的实数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$ 。称 x 为自变量， D 叫做函数的定义域， f 表示对应法则， y 的取值范围叫做函数的值域。

二十世纪以来，函数概念不断扩充，函数不仅是变数，还可以是其它变化着的事物。还出现了所谓广义函数以及函数的函数等等。但大体上可被布尔巴基的函数概念覆盖。以研究函数为己任的分析学，成为数学的三大基本分支之一，形成几何、代数、分析三足鼎立的局面。在分析学中，函数论占有重要地位，它又划分为实函数论与复函数论两大部分，

分工越来越细。

我国最早使用“函数”一词是清朝数学家李善兰。1859年李善兰在上海与英国人伟烈亚力合作译英国数学著作《代数学》时译道：“凡式含天，为天之函数”，首次将“function”译成“函数”。中国古代以天、地、人、物表示未知数，“函”字即“含有”、“包含”之意。

函数概念的演变过程，就是一个函数内涵在不断地被挖掘、丰富和精确刻划的历史过程；同时看出数学概念并非生来就有，一成不变，而是人们在对客观世界深入了解过程中得到，并不断加以发展的，从而以适应新的需要。

【附录】

一、【李善兰简介】

李善兰（1811年～1882年）浙江海宁县人，清代数学家。李善兰才智出众，数学功底很深。早年有《方圆阐幽》、《弧矢启秘》，晚年有《垛积比类》等很多著作，并有以他的名字命名的李善兰恒等式传世。

1856年与来华英国人伟烈亚力合译出版了《几何原本》后九卷，之后又翻译并于1859年出版了《代数学》、《代微积拾级》（即《解析几何与微积分初步》）等书。今天代数学与微积分学的很多中文的名词、术语，是他和他那一代译者引入和首先使用的。

二、【布尔巴基学派简介】

第一次世界大战中，法国年青的科学家们几乎都上了前线，战后，数学界出现了青黄不接、后继乏人的局面，法国数学落后了。

在这样的历史条件下，一批年轻人组成了小组，以布尔巴基为名进行活动，所出论文或书籍作者均系“布尔巴基”（布尔巴基为十九世纪法国的一位将军）。这些年轻人敢于从比较低的起点出发，向世界先进水平瞄准。他们大量阅读、研讨最新发表的论文，分析数学发展中大量新概念，每年聚会多次，热烈争鸣，严谨治学。他们还走出国界，直接倾听国外优秀数学家的讲学和介绍。在深入研究现代数学的基础上，形成了自己独特的观点——数学结构的观点，用以统一概括现代纯粹数学的新成果。在不长的时间里，他们把法国的数学水平推进到世界的前列。同时还造就一大批在数学各领域作出重要贡献的数学家。

布尔巴基学派把数学看成关于结构的科学，认为整个数学学科的宏伟大厦可以建立在丝毫不求助于直观的彻底公理化基础上，他们从集合论出发，对全部数学分支给以完备的公理化，在他们的工作中，结构的观点处于数学的中心地位。

布尔巴基学派认为最普遍、最基本的数学结构有三类，这就是代数结构、顺序结构、拓扑结构。这三种基本结构就象神经网络，渗透到各种理论，贯穿全部数学，整个数学大厦就是由各类数学结构所构成，门类万千的数学分支统一于结构之中。

布尔巴基学派写出的多达四十卷的《数学原理》，是对现代数学影响巨大的重要数学著作。