生命的代价

——无理数的发现

我们已经知道，实数中除了整数、分数这些有理数外，还有无理数。

如果有人说：“世界上只有整数和分数，除此之外，就再没有别的什么数了。”你肯定会说这是谬论。如果还没有知道世界上有无理数，并且这一说法出自一位具有威望的数学家之口，你敢怀疑吗？

毕达哥拉斯学派是古希腊的一个重要学派，为首的就是毕达哥拉斯。毕达哥拉斯学派主要研究“四艺”：几何学、算术、天文学和音乐。毕达哥拉斯本人非常重视数学，企图用数学来解释一切。毕达哥拉斯学派有一个基本观点，叫做“万物皆数”。毕达哥拉斯认为，世界上只存在着整数和分数，除这些数以外，不会有别的数了，尽管毕达哥拉斯并没有对此作过严格证明，但是出于毕达哥拉斯的威望，学派中的绝大多数人都把它视为真理。他们认为，正整数就是组成物质的基本粒子——原子。因此，一切量都可以用整数或整数的比来表示。他们觉得，一条线段就好比一串珍珠，这珍珠就是一个一个的点，不过又小又多罢了。按这种看法，两条线段长度之比，就应当是它们各自包含的小“珍珠”的个数之比，当然应当是可以用整数之比来表示的了。可是不久就出现了一个问题：若一个正方形的边长为 1，对角线的长为 l，按照他们发现的毕达哥拉斯定理（我国称为勾股定理）有 $l^2=1^2+1^2=2$，那么 l 到底等于多少呢？是整数还是分数呢？显然 l 不是整数，因为 $1^2=1$，$2^2=4$，而 $l^2=2$，所以 l 一定比 1 大，比 2 小。按照毕达哥拉斯对数的认识，l 就一定是个分数了。可是，毕达哥拉斯和他的门徒们费了九牛二虎之力，也找不到这个分数。这个事情令毕达哥拉斯学派的学者感到十分苦恼。在历史上，这件事被称为第一次数学危机。

据说，毕达哥拉斯学派的一个青年人，名叫希勃索斯，他对正方形的对角线问题很感兴趣，花费了很大精力去钻研这个问题。他先研究了正五边形，发现正五边形的对角线长 l 和边长 a 之比是不能用分数来表示的。接着，他又研究了正方形，第一个发现了正方形的边和对角线长度之比不能用整数之比来表示。他发现边长为 1 的正方形，它的对角线长为 $\sqrt{2}$ 。$\sqrt{2}$ 既不是整数，也不是分数，而是当时还没有认识的一种新数。用现在的话说，就是 $\sqrt{2}$ 不是有理数。这本是数学史上伟大的发现之一，可是毕达哥拉斯学派并不欢欣鼓舞，相反感到惊讶和困扰，因为这个发现直接和毕达哥拉斯学派的错误信条“万物皆数”相抵触，动摇了毕达哥拉斯学派的基础——“任何两个同类量可通约”，使这个学派的许多人大为惶恐和恼怒，一方面恼火地命名这种数为“无理数”，另一方面下令严密封锁希勃索斯的发现，如果谁敢泄露出去，就处以学派的极刑。尽管毕达哥拉斯学派内部纪律森严，希勃索斯的发现还是被许多人知道了。他们追查泄密的人，追查的结果，发现泄密的正是希勃索斯本人。这还了得，要活埋希勃索斯。在朋友的帮助下，希勃索斯逃走了。他在国外飘泊了许多年，后来想偷偷返回故里。回乡的途中，在地中海的一艘船上被抓住了，当场被抛到海里淹死了。为了坚持真理，希勃索斯付出了生命的代价。

可是，真理是不可能永远被淹没的，随着数学的向前发展，无理数终于在人们心目中

取得了合法的地位，被广泛使用于科学研究、技术应用和人们的社会生活之中。

最初，人们认识的无理数，都是像$\sqrt{2}$那样由开方产生的（后来被称为初等无理数）。但是，仅用有理数开方定义无理数是不对的，比如（$1+\sqrt{2}$）就不能通过对某有理数开方得到。怎么解决这个问题呢？数学家们很容易想到了，用有理数的加减乘除、乘方、开方定义新的数，后来被称为复合无理数。这样做的目的之一是使代数方程有解。既然如此，数学家们索性将新的数系定义为所有有理系数方程的根（后来称为代数数），有理数、初等无理数、复合无理数都被包括在内。

数系的扩张本来是从现实需要出发的，但现在已经开始变得抽象了，因为这个新的定义并不能回答代数数中那些不是有理数，初等无理数、复合无理数的“数”究竟是什么样子的。

代数数的概念建立以后，并没有万事大吉，十八世纪 30 年代，因证明了圆周率π与$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$是无理数，动摇了代数数的概念，而彻底摧毁这一定义的是 1844 年刘维尔证明非代数数的存在，1873 年、1883 年数学家埃尔米特与林德曼先后证明e、π不是代数数。

如何解决这些问题？数学家们伤透了脑筋。他们想到有理数都是有限小数或无限循环小数，为什么不把无理数定义为无限不循环小数呢？于是就有了现在这样对无理数的定义。它看起来很通俗，不明白无理数奥妙的人大体也是这样理解无理数的。当然，这样做还是有麻烦的，这些麻烦迫使人们不得不认真思考，建立起严密的实数体系。1874 年康托尔证明了无理数比有理数多得多、非代数数比代数数多得多！这也意味着，无形的、不是根式的无理数竟比直观的、根式的无理数多得多！数轴上代表有理数的点虽然是稠密的——任何两个有理数点之间恒有无数多个有理数点，但是除有理数点外的“空隙”更多。“空隙”一旦填满，稠密概念发展成了连续的概念，数轴上的点与实数完全对应，无理数问题画上了永远的句号。

虽然无理数从发现到发展经历了一波三折，但无理数所体现的完美无缺、一丝不苟的纯粹理性与无孔不入、尽人皆知的世俗应用，可谓占尽天上人间风光，正是数学的魅力所在。

【附录】

一、【$\sqrt{2}$不是有理数的证明】

假设$\sqrt{2}$是有理数。由于有理数只包含正、负整数、正、负分数和 0，而$\sqrt{2}>0$，故必然有两个正整数m、n，使

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m},$$

而且m和n没有大于 1 的公约数，即互质。

根据$\sqrt{2}$的定义，有

$$\frac{n^2}{m^2}=(\sqrt{2})^2=2,$$

也就是

$$n^2=2m^2。$$

这个式子右端是偶数，故左端的 n^2 也是偶数，因而 n 是偶数，$n=2k$，于是得 $4k^2=2m^2$，即 $2k^2=m^2$。又可推出 m 是偶数，这说明 m 和 n 有大于 1 的公约数，与假设矛盾。

所以，$\sqrt{2}$ 不是有理数。

二、【有理数名称的由来】

我们现在把整数和分数统称为“有理数”。据有人考证，“有理”这个词是由于一开始的翻译出了问题。原来，“有理数”中的“有理”一词，英文是 Rational。这个词本来有两个含义，其一是“比”，其二是“合理”。照数学上的原义，分数可以表示成两个整数之比，整数也可以看作是这个整数与 1 的比，把“有理数”叫做“比数”应该是很贴切的。由于无理数不能表示为两个整数的比，因此可以把“无理数”叫做“非比数”。可是，日本学者在十九世纪翻译西方的数学书时，把这个词译成了“有理数”。后来，在中日文化交流中，中国又从日本引进了“有理数”和“无理数”这两个词，长期应用到现在，没法改，也没有必要改了。