http://www.ikepu.com/book/hzx/thirdly_maths_crisis_05_total.htm

第四章：哥德尔的发现—意想不到的结果

在数理逻辑的历史上，哥德尔的工作起着承前启后的作用。1928 年希尔伯特在意大利波伦那召开的国际数学家大会上提出的四个问题，很快就被哥德尔原则上解决了。尤其是他的不完全性定理，把人们引向一种完全不同的境界，从此数理逻辑开始了一个新的时代。

在这之前，数学家期望数学有一个既广阔又严格的基础，在这个基础上数学家可以放心地去干他们愿意干的事。哥德尔的不完全性定理使这种想法破灭了。悖论所造成的危机虽然可以暂时回避，然而想从原则上一揽子解决是毫无希望的。从此之后，数学家只满足于使用集合论一些最简单的结果，而对更深入的数理逻辑与数学基础问题则不那么关心注意了。

同时，由于哥德尔在证明中发展的一些技术，也使数理逻辑成为一门具有自己独立技术和方法的数学分支。现在的数理逻辑，不管是公理集合论、模型论还是证明论、递归论都已经变得十分专门。就象代数拓扑学、算子代数、随机过程等学科，对于非本行专家来说，简直是难以理解的。

1、哥德尔小传

库尔特·哥德尔于 1906 年 4 月 28 日出生在奥匈帝国属下的布瑞尼(今天的布尔诺,这里出过另一位伟大人物遗传学之父孟德尔)，他的父母是德国人。与一般人推测不同，他并没有犹太血统。他在家乡上了四年国民学校和八年德国国立中学。1924 年中学毕业后，他进入维也纳大学哲学系，先是攻读物理，后于 1926 年转而攻读数学，这恐怕是出于他对精密性和严格性过分偏爱的缘故。当时的维也纳大学有不少有国际声誉的数学家，如曾解决过希尔伯特的一些猜想的数论专家费特万格勒，泛函分析的创始人之一哈恩与拓扑学家门格尔等。大学时他对费特万格勒的数论课很有兴趣，这同他后来的工作有很大关系，比如他应用孙子定理来构造由加法与乘法表出的原始递归函数。

上大学时，哥德尔对哲学也很有兴趣，实际上对哲学的探索始终贯穿着他的一生。他听哲学教授的讲课，特别是经常参加维也纳小组的活动。二十世纪最主要的哲学流派——逻辑实证主义当时刚刚开始他们的事业，哥德尔赞成以施里克为首的这个学派的分析方法，即用数理逻辑来对哲学及科学概念进行分析。但是他也一直不同意他们否定客观实在性，及认为形而上学命题是无意义命题等基本观点。不过，他的哲学观点也促使他对于数理逻辑进行深入的钻研。

当时数理逻辑的经典著作是罗素和怀特海的《数学原理》，这三卷满是符号的大书，恐怕只有极少数人读过。1928 年，希尔伯特和阿克曼合著的《理论逻辑纲要》出版，这是一本论述简明、清晰，概括性强的好书，对哥德尔的启发性很大。书中明确提出一个尚未解决的问题——狭义谓词演算的完全性问题。哥德尔很快解决了这个问题，把结果写成博士论文，成为他一生事业的开端。

1929 年秋天，他进行答辩。1930 年 2 月得到批准取得博士学位。1930 年夏天，哥德尔开始研究希尔伯特计划，他想证明分析的无矛盾性。9 月，他到东普鲁士哥尼斯堡去参加科学会会议，许多著名数学家如希尔伯特、冯·诺依曼、海丁、卡尔纳普都参加了这次会议。希尔伯特在会上做了题为“逻辑和对自然的认识”的著名演说，他乐观地宣称：“我们必须知道，我们将会知道”。可是，就在这个会上哥德尔宣布了他的第一不完全性定理。不久，他又证明了第二不完全定理。这个结果毫无疑义对希尔伯特计划是莫大的打击。

1931 年哥德尔在维也纳大学当助教，这篇文章成为就职论文而受到了很高的评价。从 1933 年到 1938 年，他在维也纳大学当讲师。1932 年他到过哥丁根，见到过爱米·诺特、西格尔、甘岑等人。他没见到早逝的天才厄布朗，但他们交换过信件，厄布朗的信中有最早的递归函数想法。但是厄布朗只收到哥德尔一封信。

1933 年到 1934 年，哥德尔第一次来到普林斯顿大学高等研究院。他在这里见到丘奇、克林和罗塞尔。他在普林斯顿大学发表了《论形式数学系统的不可判定命题》的演讲，这对后来美国研究递归论是极大的推动。

1937 年，哥德尔在维也纳讲授“公理化集合论”，这时他开始集中力量研究这个题目。在他秋天来到高等研究院时，他已经对选择公理的无矛盾性有所考虑，并把自己的思想同冯·诺依曼交谈过。不过，他的可构造集的思想、广义连续统假设和选择公理与 NGB 系统的无矛盾性，一直到 1938 年秋天才在高等研究院讲演，并在 1938 到 1940 年发表。这时他已经开始定居美国了。

1938 年 3 月，希特勒兼并奥地利，这时哥德尔刚刚结婚。1939 年 9 月，二次大战爆发，他于 1939 年底横贯苏联的西伯利亚大铁路经日本到了美国，从此再也没有回奥地利。在美国，除了 1940 年春季在圣母大学任教外，一直在普林斯顿高等研究院工作。由于研究院里有人反对和阻挠，直到 1947 年他才被批准为常任研究员，1953 年才成为教授。对于这样伟大的数学家来说，得到这种称号的时间实在是太晚了。到这时，他在数理逻辑方面的主要工作都已经完成了，他的兴趣已经转向其他方面了。

1947 年到 1951 年，哥德尔开始注意和研究广义相对论。他同爱因斯坦是多年老邻居，他们几乎天天一起散步回家。但是哥德尔表示，他对相对论的兴趣并非来自同爱因斯坦的谈话，而是来自对康德时空哲学的兴趣。1950 年，他在国际数学家大会上做的报告，就是关于“旋转宇宙”的论文。

后来，哥德尔的兴趣转向哲学。他认为，健全的哲学思想对科学研究的成功有很密切的关系。他说，数学及元数学的(特别是关于超穷推理的)客观主义观点，对于他的逻辑研究是最根本的。1959 年起，哥德尔开始阅读德国哲学家胡塞尔的哲学著作，并一直保持着强烈的兴趣。他认为有些哲学家，特别是拍拉图和笛卡尔，在他们一生中具有一种与日常生活的世界观完全不同的直观的世界观，也许胡塞尔也曾达到过这种境界。

晚年，哥德尔间或对数理逻辑作些工作。美国符号逻辑协会正在组织力量搜集整理他的著作，准备出版他的全集。他已经出版的逻辑方面的论著不过二十余篇，大都很简短，不过它们在历史上的作用是十分巨大的。

1978 年 1 月 14 日下午，哥德尔在普林斯顿医院的椅子上坐着候诊时去世，享年 72 岁。

2、1930 年数理逻辑的状况

1930 年前，整个数学界是非常乐观的：希尔伯特的思想占统治地位；数学是建立在集合论和数理逻辑两块基石之上；康托尔的朴素集合论已被公理集合论所代替，从而消除了悖论；选择公理是一个很好的工具，数学中许多部门都要用到它；连续统假设仍然是悬案，不过希尔伯特多次觉得自己已接近解决这个难题，看来前景是乐观的；大部分数学可以建立在谓词演算的基础上，而一阶谓词演算的公理系统是无矛盾的，尽管其完全性仍有待证明；整个数学的基本理论是自然数的算术和实数理论，它们都已经公理化。这些公理系统应该是无矛盾的、完全的，如果它们能够得证，并且集合论公理系统也能得到同样的结果，那么整个数学就比较牢靠了。

为了不使一小撮直觉主义者指手划脚、评头品足，希尔伯特提出他的计划：把理论系统形式化，然后通过有限多步证明它们没有矛盾。他信心十足，在 1930 年 9 月东普鲁士哥尼斯堡的科学会会议上，他批判了不可知论。

1928 年希尔伯特提出四个问题：

1、分析的无矛盾性。1924 年阿克曼和 1927 年冯·诺依曼的工作使希尔伯特相信只要一些纯算术的初等引理即可证明。1930 年夏天，哥德尔开始研究这个问题，他不理解希尔伯特为什么要直接证明分析的无矛盾性。哥德尔认为应该把困难分解：用有限主义的算术证明算术的无矛盾性，再用算术的无矛盾性证明分析的无矛盾性，哥德尔由此出发去证明算术的无矛盾性而得出不完全性定理。

2、更高级数学的无矛盾性，特别是选择公理的无矛盾性。这个问题后来被哥德尔在 1938 年以相对的方式解决。

3、算术及分析形式系统的完全性。这个问题在 1930 年秋天哥尼斯堡的会议上，哥德尔已经提出了一个否定的解决，这个问题的否定成为数理逻辑发展的转折点。

4、一阶谓词逻辑的完全性。这个问题已被哥德尔在 1930 年完全解决。

这样一来，哥德尔的工作把希尔伯特的方向扭转，使数理逻辑走上全新的道路。

3、1930 年哥德尔的两项主要贡献

1、完全性定理：哥德尔的学位论文《逻辑函数演算的公理的完全性》解决了一阶谓词演算的完全性问题。罗素与怀德海建立了逻辑演算的公理系统的无矛盾性及完全性(也许还包括不那么重要的独立性)。所谓完全性就是，每一个真的逻辑数学命题都可以由这个公理系统导出，也就是可证明。

命题演算的完全性已由美国数学家波斯特在 1921 年给出证明，而一阶谓词演算的完全性一直到 1929 年才由哥德尔给出证明。但是哥德尔认为，斯柯仑在 1922 年的文章中已隐含证明了命题演算的完全性，但是他没有陈述这个结果，可能是他本人并没有意识到这一点。

2、哥德尔的不完全性定理：这是数理逻辑最重大的成就之一，是数理逻辑发展的一个里程碑和转折点。哥德尔在研究过程中直接考虑悖论及解决悖论的方法，从而把第三次数学危机引导至另外一个方向上。

哥德尔证明不完全性定理是从考虑数学分析的协调性问题开始的。1930 年秋在哥尼斯堡会议上，他宣布了第一不完全性定理：一个包括初等数论的形式系统，如果是协调的，那就是不完全的。不久之后他又宣布：如果初等算术系统是协调的，则协调性在算术系统内不可证明。

哥德尔的证明使用了“算术化”的方法。哥德尔说：“一个系统的公式……从外观上看是原始符号的有穷序列……。不难严格地陈述，哪些原始符号的序列是合适公式，哪些不是；类似地，从形式观点看来，证明也只不过是(具有某种确定性质的)一串公式的有穷序列”。因此，研究一个形式系统实际上就是研究可数个对象的集合。我们给每个对象配上一个数，这种把每一个对象配上一个数的方法称为“哥德尔配数法”。哥德尔通过这些数反过来看原来形式系统的性质。

哥德尔研究了 46 种函数和谓词，哥德尔证明了他的前 45 个函数和谓词都是原始递归的。但第 46 个谓词为“X 是一个可证公式的哥德尔数”。在对哥德尔配数的系统中，可以得到一个公式，它相当于：我是不可证的。所以这个句子是不可证的且是真的。所以系统中存在真语句而又不可证，也就是系统不完全。

哥德尔的论文在 1931 年发表之后，立即引起逻辑学家的莫大兴趣。它开始虽然使人们感到惊异不解，不久即得到广泛承认，并且产生巨大的影响：

哥德尔的证明对希尔伯特原来的计划是一个巨大的打击，因此把整个数学形式化的打算是注定要失败的，因而逻辑主义和形式主义的原则是不能贯彻到底的；“希尔伯特计划”中证明论的有限主义观点必须修正，从而使证明论的要求稍稍放宽。1936 年甘岑在容许超穷归纳的条件下证明了算术的无矛盾性，而倡导有限构造主义的直觉主义也不能解决问题；哥德尔的工具递归函数促进了递归函数论的系统研究，同时推动了不可判定问题的研究，开始出现递归论的新分支。

哥德尔不完全定理的证明结束了关于数学基础的争论不休的时期，数学基础的危机不那么突出表现出来。数理逻辑形成了一个带有强技巧性的独立学科，而绝大部分数学家仍然把自己的研究建立在朴素集合论或 ZF 公理集合论的基础上。

尽管集合论中存在矛盾，但这些矛盾大部分均可回避。研究这些矛盾，特别是集合论的矛盾变成数理逻辑学家的事业。另外一方面，直觉主义和构造主义数学虽然也有发展，但终究是一小部分，半个世纪以来，在数学中始终不占统治地位。因为矛盾也好、危机也好，根源在于无穷，但是数学中毕竟少不了无穷。归根结蒂，数学终究是研究无穷的科学。