

混沌与分形

混沌

学习了牛顿力学后，往往会得到这样一种印象，或产生这样一种信念：物体受力已知的情况下，给定了初始条件，物体以后的运动情况（包括各时刻的位置和速度）。就完全定了，并且可预测了。这种认识被称作决定论的可预测性。验证这种认识的最简单例子是抛体运动。物体受的重力是已知的，一旦初始条件（抛出点的位置和抛出时速度）给定了，物体此后任何时刻的位置和速度也就决定了。物体在弹力作用下的运动也是这样，已知的力和初始条件决定了物体的运动。这两个例子中都可以写出严格的数学运动学方程，即解析解，从而使运动完全可以预测。

牛顿力学的这种决定论的可预测性，其威力曾扩及宇宙天体。1757年，哈雷彗星在预定的时间回归，1846年海王星在预言的方位上被发现，都惊人的证明了这种认识。这样的威力曾使伟大的法国数学家拉普拉斯夸下海口：给定宇宙的初始条件，我们就能预言它的未来。当今日蚀和月蚀的准确预测，宇宙探测器的成功发射与轨道设计，可以说是在较小范围内实现了拉普拉斯的壮语。牛顿力学在技术中得到了广泛的成功的应用。物理教科书中利用典型的例子对牛顿力学进行了定量的严格的讲解。这些都使得人们对自然现象的决定论的可预测性深信不疑。

但是，这种传统的思想信念在20世纪60年代遇到了严重的挑战。人们发现由牛顿力学支配的系统，虽然其运动是由外力决定的，但是在一定条件下，却是完全不能预测的。原来，牛顿力学显示出的决定论的可预测性，只是那些受力和位置或速度有线性关系的系统才具有的。这样的系统叫线性系统。牛顿力学严格地成功处理过的系统都是这种线性系统。对于受力复杂的非线性系统，情况就不同了。下面通过一个实际例子说明这一点。决定论的不可预测性。用畅销名著《混沌——开创一门新科学》的作者格莱克的说法，蝴蝶效应指的是“今天在北京一只蝴蝶拍动一下翅膀，可能下月在纽约引起一场暴风雨。”下面是几个混沌实例。

1. 天体运动的混沌现象

前已述及，三体问题，更不要说更多体的问题，不可能有解析解。对于这类问题，目前只能用计算机进行数值计算。现举一个简单的例子。两个质量相等的大天体 M_1 和 M_2 围绕它们的质心做圆周运动。选择它们在其中都静止的参考系来研究另一个质量很小的天体 M_3 在它们的引力作用下的运动。计算机给出的在一定条件下 M_3 运动的轨迹。 M_3 的运动轨道是决定论的不可预测的，不可能知道何时 M_3 绕 M_1 运动或绕 M_2 运动，也不能确定 M_3 何时由 M_1 附近转向 M_2 附近。对现时太阳系中行星的运动，并未观察到这种混乱情况。这是因为各行星受的引力主要是太阳的引力。作为一级近似，它们都可以被认为是单独在太阳引力作用下运动而不受其它行星的影响。这样太阳系中行星的运动就可以视为两体问题而有确定的解析解。另一方面，也可以认为太阳系的年龄已够长以至初始的混沌运动已消失，同时年龄又没有大到各可能轨道分离到不可预测的程度。（顺便指出，人造宇宙探测器的轨道不出现混沌是因为随时有地面站或宇航员加以控制的缘故。）但是就在太阳系内，也真在在引力作用下的混沌现象发生。结合牛顿力学和混沌理论已证明，冥王星的运动以千万年为时间尺度是混沌的。（这一时间尺度虽比它的运行周期250年长得得多，但比起太阳系的寿命——50亿年——要短得多了。）哈雷彗星运行周期的微小变动也可用混沌理论来解释。1994年7月苏梅克—列

维 9 号彗星撞上木星这种罕见的太空奇观也很可能就是混沌运动的一种表现。

在太阳系内火星和木星之间分布有一个小行星带。其中的小行星的直径约在 1km 和 1000km 之间，它们都围绕太阳运行。由于它们离木星较近，而木星是最大的行星，所以木星对它们的引力不能忽略。木星对小行星运动的长期影响就可能引起小行星进入混沌运动。1985 年有人曾对小行星的轨道运动进行了计算机模拟，证明了小行星的运动的确可能变得混沌，其后果是被从原来轨道中甩出，有的甚至可能最终被抛入地球大气层中成为流星。令人特别感兴趣的是美国的阿尔瓦莱兹曾提出一个理论：在 6500 万年前曾有一颗大的小行星在混沌运动中脱离小行星带而以 10^4m/s 的速度撞上地球（墨西哥境内现存有撞击后形成的大坑）。撞击时产生的大量尘埃遮天闭日，引起地球上的气候大变。大量茂盛的植物品种消失，也导致了以植物为食的恐龙及其它动物品种的灭绝。

2. 生物界的混沌

混沌，由于其混乱，往往使人想到灾难。但也正是由于其混乱和多样性，它也提供了充分的选择机会，因此就有可能使得在走出混沌时得到最好的结果。生物的进化就是一个例子。

自然界创造了各种生物以适应各种自然环境，包括灾难性的气候突变。由于自然环境的演变不可预测，生物种族的产生和发展不可能有一个预先安排好的确定程序。自然界在这里利用了混乱来对抗不可预测的环境。它利用无序的突变产生出各种各样的生命形式来适应自然选择的需要。自然选择好像一种反馈，适者生存并得到发展，不适者被淘汰灭绝。可以说，生物进化就是具有反馈的混沌。

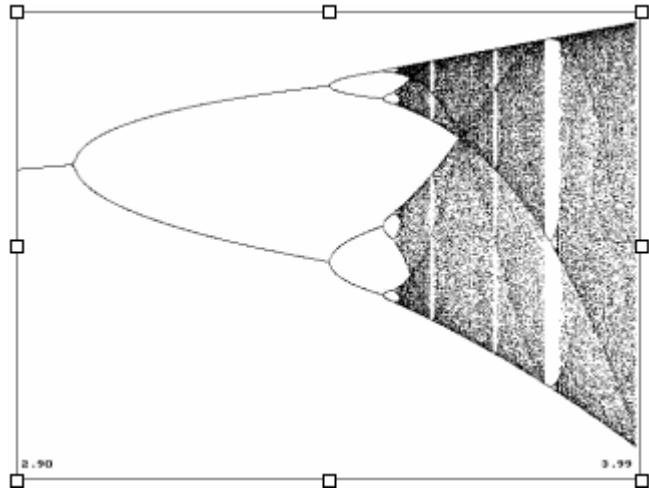
人的自体免疫反应也是有反馈的混沌。人体的这种反应是要对付各种各样的微生物病菌和病毒。一种理论认为，如果为此要建立一个确定的程序，那就不但要把现有的各种病菌和病毒都编入打击目录，而且还要列上将来可能出现的病菌和病毒的名字。这种包揽无余的确定程序是不可能建立的。自然界采取了以火攻火的办法利用混沌为人体设计了一种十分经济的程序。在任何一种病菌或病毒入侵后，体内的生产器官就开始制造形状各种各样的分子并把它们运送到病菌入侵处。当发现某一号分子能完全包围入侵者时，就向生产器官发出一个反馈信息。于是生产器官就立即停止生产其它型号分子而只大量生产这种对路的特定型号分子。很快，所有入侵者都被这种分子所包围，并通过循环系统把它们带到排泄器官（如肠、肾）而被排出体外。最后，生产器官通知关闭，一切又恢复正常。

在医学研究中，人们已发现猝死、癫痫、精神分裂症等疾病的根源。可能就是混沌。在神经生理测试中，已发现正常人的脑电波是混沌的，而神经病患者的往往简单有序。在所有这些领域，对混沌的研究都有十分重要的意义。

此外，在流体动力学领域还有一种常见的混沌现象。在管道内流体的流速超过一定值时，或是在液流或气流中的障碍物后面，都会出现十分紊乱的流动。这种流动叫湍流（或涡流）。下图是在一个圆柱体后面产生的水流涡流图像，上图是直升机旋翼尖后面的气流涡流图像。这种湍流是流体动力学研究的重要问题，具有很大的实际意义，但至今没有比较满意的理论说明。混沌的发现给这方面的研究提供了可能是非常重要的或必要的手段。对混沌现象的研究目前不但在自然科学领域受到人们的极大关注，而且发展到人文学科，如经济学、社会学等领域。

3 一维逻辑斯蒂映射

非线性科学史中，关于一维逻辑斯蒂映射的研究有一系列有趣的典故，涉及一长串著名科学家的名字，如马尔萨斯 (T. R. Malthus, 1766-1834)、乌拉姆 (S. M. Ulam, 1909-1984)、萨可夫斯基 (A. N. Sarkovskii)、MSS (指三个人)、DGP (指三个人)、费根鲍姆、梅 (R. May, 1936- ,)、约克 (J. Yorke, 1941-)、李天岩、辛格 (D. Singer) 等等，限于篇幅，本书不再叙述。下面仅从图形的角度非常粗浅地介绍逻辑斯蒂映射的分岔过程。



映射 (mapping) 也叫迭代 (iteration)，比如 $x_{(n+1)}=2x_n$ ，若 $x_1=3$ ，则 $x_2=6$ ， $x_3=12$ 等等。从控制系统的角度看，这也叫反馈 (feedback)，把输出当作输入，不断滚动。很容易想到，反馈的结果有若干种：发散的、收敛的、周期的等等。但是我们要问一下，一共有多少种可能的运动类型？是否存在既不收敛也不发散，也不周期循环的迭代过程？回答是肯定的。这一点至关重要，但可惜的是人们最近才普遍认识到有这种运动类型。这说的就是有界非周期运动，它与混沌有关。

逻辑斯蒂映射的形式为

$$x_{(n+1)}=ax_n(1-x_n),$$

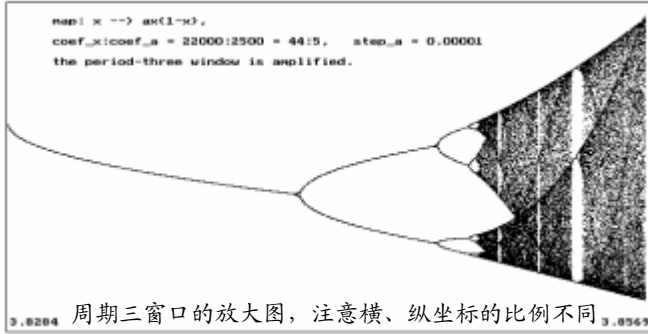
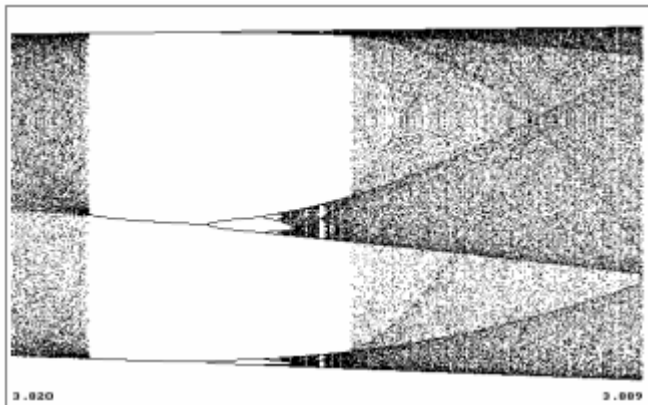
其中 a 是参数，取值范围是 $[-2, 4]$ ，

通常人们只注意 $[0, 4]$ 这一半，其实另一半 $[-2, 0]$ 也一样有趣。

x 的取值为 $[0, 1]$ 。映射的不动点是指满足关系 $\xi = a\xi(1-\xi)$ 的相点 ξ ，解得 $\xi_1=0$ ， $\xi_2=1-1/a$ 。设映射用 f 表示， f 的 2 次迭代记作 f^2 ，3 次迭代记作 f^3 ，等等。注意，这种记法不表示乘方关系。 f 的不动点也叫 f 的周期 1 点。 f^2 的不动点实际上是 f 的周期 2 点。同理 f^n 的不动点与 f 的周期 n 点是一回事。映射 f 的周期 m 点的稳定性由乘子

$\lambda = |df^m/dx| = |f'(x_1)f'(x_2)\dots f'(x_m)| = |\prod_{i=1}^m f'(x_i)|$

完全决定。映射 f 的周期点 (包括不动点，它为周期 1 点) 的稳定性可具体定义为：
 $|\lambda| < 1$ ，吸引，稳定；
 $|\lambda| > 1$ ，排斥，不稳定；
 $|\lambda| = 1$ ，中性；



周期三窗口的放大图，注意横、纵坐标的比例不同

```
map: x --> ax(1-x),
coef_x:coef_a = 22000:2500 = 44:5, step_a = 0.00001
the period-three window is amplified.
```

$\lambda=0$ ，超稳定。

以参数 a 为横坐标、以 x 的稳定定态(stable steady states)为纵坐标作图，的图中可以看出开始是周期加倍分岔(也称周期倍化分岔或周期倍分岔)，然后是混沌，混沌区中又有周期窗口。窗口放大后又可见到同样结构的一套东西。此所谓无穷自相似结构。

更为有趣的是，不但对于上述形式的映射有这种分岔结构，映射取如下形式

$$x_{(n+1)}=1-\lambda x_n^2,$$

$$x_{(n+1)}=\mu \sin(\pi x_n),$$

$$x_{(n+1)}=x_n \text{EXP}[\delta(1-x_n)]$$

时，仍然可以得到相似的结构，这叫做结构普适性。从图中看到，一维映射不断发生周期倍化分岔，比如存在 $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^\infty$ 及 $3 \times 2, 3 \times 2^2, 3 \times 2^3, \dots, 3 \times 2^\infty$ 等周期加倍过程。早在 60 年代苏联就有一位杰出的数学家将所有可能的周期轨道进行了排序，这人便是萨可夫斯基，1995 年他曾到中国进行学术访问。萨可夫斯基序列中第一个是周期 3，然后是周期 5，最后是周期 4、周期 2 和周期 1，中间有无穷多别的周期。

曾在洛斯阿拉莫斯国立实验室任职的费根鲍姆在研究周期倍化过程中，发现相邻分岔间距之比收敛到一个不变的常数：

$$\delta = \lim_{(n \rightarrow \infty)} |[a_n - a_{(n-1)}] / [a_{(n+1)} - a_n]| = 4.669, 201, 609 \dots$$

不仅仅对于逻辑斯蒂映射有这个常数，对于一维“单峰”映射，都能算出同一个常数 δ 来。这件事很重要，令非线性科学界为之一震，后来曾有人为此提议给费根鲍姆授诺贝尔奖，但未成功。原因不详，作者猜大概是：第一，严格说来这项成果属于数学而非物理科学，而诺贝尔奖从不授予数学学科；第二，人们还未彻底搞清 δ 的含义、意义；第三，此项建议在讨论过程中首先遭到非线性科学内部权威人士的激烈反对。此次未获奖，不等于以后不能获奖，不过麻烦的是，非线性科学研究是集体奋斗的历史，我们一口气可以说出 10 个、20 个杰出科学家，但找出一个或者两个最杰出者，却让人犯难。如果把非线性科学与相对论、量子力学相比，这也是一个极大的区别。也许一人或者几人独创一门新科学(如相对论)的时代一去不复返了。

分形

闪电、冲积扇、泥裂、冻豆腐、水系、晶簇、蜂窝石、小麦须根系、树冠、支气管、星系、材料断口、小肠绒毛、大脑皮层……。想想它们的形状、结构！

每样东西都挨不上。但它们都是分形(fractal)，从分形眼光看，它们的确是一回事，都可统一用分形理论描述。

分形是近 20 多年来科学前沿领域提出的一个非常重要的概念，具有极强的概括力和解释力。分形理论是一种非常深刻、有价值、让人着迷的理论。

到 1996 年底为止，混沌(chaos，也译作“浑沌”)、分形和孤子(soliton，有时也称“孤波”(solitary wave))仍然是非线性科学(nonlinear science)中最重要的三个概念。

就目前情况而言，在学科定位上，分形研究属于非线性科学。非线性科学是相对于线性科学而言的，非线性现象普遍存在，但很难研究，科学界现在刚刚开始向非线性进军。

分形理论诞生于 70 年代中期，创始人是美国 IBM 的研究人员芒德勃罗(B. B. Mandelbrot, 1924-，FRACTAL@watson.ibm.com)，他 1982 年出版的《大自然的分形几何学》(*The Fractal Geometry of Nature*)是这一学科经典之作。

分形指具有多重自相似的对象，它可以是自然存在的，也可以是人造的。花椰菜、树木、山川、云朵、脑电图、材料断口等都是典型的分形。如果您从未听说过“分形”，一时又很难搞清楚分形是什么，有一个简单迅捷的办法：去市场买一个新鲜的菜花(花椰菜)，掰下一枝，切开，仔细观察，思考其组织结构。这就是分形！好了，分形概念虽然极有价值，但它并不神秘，人人都能明白它的基本含义。

分形理论是一门交叉性的横断学科，从振动力学到流体力学、天文学和计算机图形学，从分子生物学到生理学、生物形态学，从材料科学到地球科学、地理科学，从经济学到语言学、社会学等等，无不闪现着分形的身影。分形理论已经对方法论和自然观产生强烈影响，从分形的观点看世界，我们发现，这个世界是以分形的方式存在和演化着的世界。引用分形这一学科当之无愧的领袖人物芒德勃罗的话，也许可以使您很快进入状态：分形理论有很强的解释能力，能说明大自然的许多形态发生和自组织过程，分形自相似原理和分形迭代生成原理对于人们更好地认识世界起到了推动作用。分形图形生成技术也对传统艺术造成了不小的冲击。但不能把一种科学理论任意夸大、玄学化。分形理论与所有其他科学理论一样，决不是万能的。分形理论已走过轰轰烈烈的革命式发展时期，已进入平稳发展过程。注意到其限度，不断创新，由分形引出的新科学才有生命力。

分数维数：从拓扑维到度量维

整数维数是整数，这还好理解，原来我们知道的整数维数是拓扑维数，只能取整数，维数表示描述一个对象所需的独立变量的个数。在直线上确定一个点需要一个坐标，在平面上确定一个点得用两个坐标，在三维空间中确定一个点得用三个坐标，等等。

除拓扑维数外，还有度量维数，它是从测量的角度定义的。原来的维数也可以从测量的角度重新理解。为什么要发展测量维数的定义？其实维数概念并不是从天上掉下来的，都有“操作”的成分，都可以从操作的角度说明。学过数学的人都知道，积分理论从黎曼积分发展到勒贝格积分，就是因为引入了“测度”这一概念，这一举动克服了传统积分理论的许多缺陷，扩充了所研究的函数的范围和极限的意义。后来柯尔莫哥洛夫(A. N. Kolmogorov, 1903-1987)将勒贝格测度引入概率论，又为概率论奠定了坚实的基础。

分数维数并不神秘。我们首先说明，从测量的角度看，维数是可变的。看一个毛线团。从远处看，它是一个点：0 维的，好比在广阔的银河系外宇宙空间看地球，地球的大小可以忽略不计。再近一些，毛线团是三维的球，好比进入太阳系后，乘航天飞机在太空沿地球轨道飞行。再近一些，贴近其表面，它是二维的球面，甚至二维的平面，这好比我们站在旷野上环顾左右或者站在草原的小山丘上向四周眺望。再近一些，看一根毛线，它是一维的线。再细看，它是三维的柱体。再近一些，它又是二维柱面或者二维平面。再接近，看毛线上的纤维，它又是一维的。再近则又变成三维柱了……所以说对象的维数是可以变化的，关键是我们从什么尺度去观察它、研究它，一旦尺度确定了，对象的维数就确定了。反过来，不规定尺度，问一个对象的维数，其实很难回答。这正如问海岸线的长度一样，只有告诉用什么样的刻尺去测量，才能得到明确的结果。

作为整数的拓扑维，在拓扑变换下是不变的，所以拓扑学也叫“橡皮几何”，拓扑空间可以像橡皮一样任意拉伸，只要不发生粘连和撕断。对于分形对象，仍然可用拓扑变换来考察，但也可以用别的更好的、更形象的办法考察。分形体有许多空洞，像冻豆腐一样，用

空间充 填的办法测度它，是一个好主意。

从测量的角度重新理解维数概念，就会自然地得出分数维数的概念，实际上 1919 年豪斯道夫已经作了这种推广。我们看一个例子。

一根线段 L ，它是一维的，取单位长度 A ，将它的线度(边长)扩大到原来 的三倍，看看能得到几个原始对象(单位长度为 A 的线段)。显然得到三个：

$$L \rightarrow 3L = 3^1 * L.$$

再看平面上的一个正方形 P ，边长为 A ，假设仍然将其线度(边长)扩大到 原来的三倍，则得到 9 个正方形：

$$P \rightarrow 9P = 3^2 * P.$$

对于三维空间上的正方体 V ，边长为 A ，假设仍然将其线度(边长)扩大到原来 的三倍，则得到 27 个立方体：

$$V \rightarrow 27V = 3^3 * V.$$

得到的总个数可以表达为关系：

$$M = B^d,$$

其中 B 指放大倍数， M 是总个数， d 相当于对象的维数。上式换一种写 法，就有：

$$d = \log M / \log B,$$

其中指数 d 相当于维数。

以上是从放大的角度看问题，还可以从反面理解：从“铺砌”的角度看，对于给定的对象，用很小的单元块 ϵ 充填它，最后数一数所使用的小单元数目 N 。改变 ϵ 的大小，自然会得到不同的 N 值， ϵ 越小，得到的 N 显然越大， ϵ 越大，得到的 N 就越小。将测到的结果在“双对数”坐标纸上标出来，往往会得到一条直线，此直线的斜率的绝对值就是对象的维数 d 。用数学关系表达就 是：

$$d = \lim_{(\epsilon \rightarrow 0)} \log N(\epsilon) / \log(1/\epsilon) = -\lim_{(\epsilon \rightarrow 0)} \log N(\epsilon) / \log \epsilon.$$

在双对数坐标纸上绘出数据点，进而看看数据是否呈直线关系，或者可以分解为几段直线，然后求出直线的斜率，这个斜率的绝对值就代表维数。

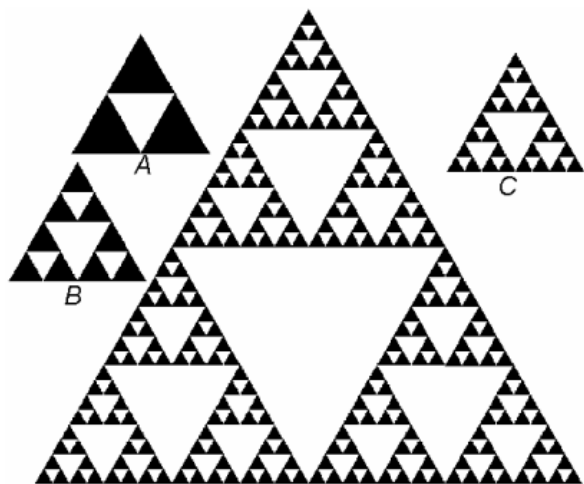
这是最简单的“计盒维数”，现在已经有许多种维数计算公式，如容量维、柯尔莫哥洛夫维、信息维、关联维、雷尼(A. Renyi)维等等。用得最多的是关联维。

谢尔宾斯基地毯

波兰著名数学家谢尔宾斯基在 1915-1916 年期间，为实变函数理论构造了几个典型的例子，这些怪物常称作“谢氏地毯”、“谢氏三角”、“谢氏海绵”、“谢氏墓塚”。如今，几乎 任何一本讲分形的书都要提到这些例子。它们不但有趣，而且有助于形象地理解分形。我们首先看谢氏三角形。取一个大的正三角形，即等边三角形。连接各边的中点，得到 4 个 完全相同的小正三角形，挖掉中间的一个，这是第一步。

然后将剩下的三个小正三角形按照上述办法各自取中点、各自分出 4 个小正三角形，去掉中间的一个小正三角形，这是第二步。

依次类推，不断划分出小的正三角形，同时去掉中间的一个小正三角形。这就是谢氏三角形的生成过程。数学家很关心当步数趋于无穷大时最后留下了什么。的确，最后仍然剩下一些东西。



直观上可以想像，最后得到的极限图形面积为零。设初始三角形面积为 S ，则第一步完成后去掉的面积为 $1/4S$ 。第二步完成后去掉的面积为 $1/4S+3 \times (1/4)^2 S$ 。第三步完成后总共去掉的面积为 $1/4S+3 \times (1/4)^2 S+3^2 \times (1/4)^3 S$ 。第 n 步后去掉的总面积为：

$$S_n(\text{去掉}) = S/4 \times [1+3/4+\dots+(3/4)^{n-1}] = S \times [1-(3/4)^n]$$

显然，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $S_n(\text{去掉}) \rightarrow S$ ，即剩下的面积为零。读者朋友最好拿一张纸，亲自试一试挖取三角形的过程，挖掉的部分涂黑，用不了几步，就会发现差不多一片黑了。重要的是，在挖取操作中能够体会分形的生成过程：生成分形一点也不难，小孩子也会做！

我们大多不是数学家，所以不必真的关心极限图形，观察前 8 步就足够了。实际上，无限精度只是个理想，作为物理学工作者（大家都是广义的物理学工作者！），接触的永远是有限世界，更感兴趣的是有限到无限的过程。当步数 n 比较大时，我们就可以近似认为达到了无穷。在几乎所有规则分形的生成过程中， n 取 20 便足可以认为是 ∞ 了！

在挖取三角形的过程中，我们发现，每一步构造出的小三角形与整个三角形是相似的，特别是当步数 n 较大时，相似性更是明显，有无穷多个相似，每一小三角形与任何其他三角形也都是相似的。

上面是以正三角形说明的，那么换成一般的三角形是否可以呢？当然可以。如果最初选一个非常一般的三角形，每次也取中点，去掉中间一个小三角形，最后得到的结论完全一样。那么不用三角形是否可以呢？也当然可以。比如开始时取一个正方形，将它 9 等分，去掉中间一个小正方形。以上都是在二维平面上操作，增加一维可以吗？当然可以。其实数学家就是这样想问题的：不断推广，力求得到更一般性、更普适的结论。

实际上一大类规则分形都可以这样生成出来，这种过程具有一般性，并可以用几套语言类似地表示出来：

- 分形=原形+生成元+迭代；
- 分形=公理+产生式+解释；
- 分形=初条件+输入+反馈；

现在已经接触了几种传统分形对象，它们的维数用传统概念去描述都很别扭，用分数维数描述是一个好主意。对于规则的分形体，通常可用相似性维数代表它的分数维数。设对象可以剖分为 N 个局部单元，每个单元以相似比 β 与整体相似，则对象的相似性维数可以定义如下：

$$D = \log N / \log(1/\beta) = -\log N / \log \beta$$

在具体计算时，也可以反过来理解：如果将分形对象的一部分(用 S 代表)的“线度”放大 $1/\beta$ 倍,对象放大了 N 倍(即出现了 N 个 S),则此分形的相似性维数是 $D=-\log N/\log \beta$ 。以柯赫雪花曲线为例,看其中的一部分(以 S 记之),由生成元可知,线度放大 3 倍,对象 S 放大了 4 倍(即出现了 4 个 S),则柯赫雪花曲线的相似性维数为 $\log 4/\log 3=1.2618\dots$ 。

丢勒正五边形分形维数 $D=\log 5/\log (3+\text{SQRT}(5)/2)=1.672\dots$

康托尔集分数维数 $D=\log 2/\log 3=0.6309\dots$,

希尔伯特曲线分数维数 $D=\log 4/\log 2=2.0$,

柯赫雪花曲线分数维数 $D=\log 4/\log 3=1.2618\dots$,

柯赫岛边界线分数维数 $D=\log 18/\log 6=1.6131\dots$,

柯赫十字岛分数维数 $D=\log 32/\log 8=1.666\dots$,

谢尔宾斯基三角垫片分数维数 $D=\log 3/\log 2=1.585\dots$,

谢尔宾斯基四方垫片分数维数 $D=\log 8/\log 3=1.8927\dots$,

门格尔海绵分数维数 $D=\log 20/\log 3=2.7268\dots$ 。