

# 方法和能力的试金石

## ——圆周率小史

无论什么圆，它的周长与直径之比总是一个常数，人们把这个常数叫做圆周率，记为  $\pi$ 。

在希腊文中， $\pi$  是饼的头一个字母，饼是圆的，因此，古希腊人用  $\pi$  表示圆周率，恰到好处地反映了圆的本质。

$\pi$  是多少？人类探索了几千年，至今仍然是数学家和计算机专家继续探讨的课题。

早期的人类，用 3 作为圆周率的近似值。

远在上古时期，我国就有“径一周三”的古率（《周髀算经》中有述）。《旧约全书》列王记中也有使用圆周率为 3 的记载（公元前九世纪前后）。

大约在公元前 2000 年，巴比伦人认为

$$\pi \approx 3\frac{1}{8} = 3.125。$$

在此前后，古埃及人认为直径为 9 的圆和边长为 8 的正方形的面积相当，这意味着

$$\pi \approx \frac{256}{81} = 3.1604\cdots。$$

由于圆周率是一个无理数，人们无法以当时已知的有理数准确地表示它，但却能不断以有理数越来越精确地逼近它。求更精确的圆周率成为古代数学的一个经久不衰的热门课题，人们对它的研究热情达到了这种程度，以致于人们倾向于认为：“在数学发展的历史上，许多国家的数学家都曾寻找过更精确的圆周率，因此，圆周率的精确程度可以作为衡量某个国家古代数学发展水平的标志。”

从公元前三世纪到公元十七世纪这漫长的二千多年里，中外数学家经过不懈努力，主要利用古典方法人工计算  $\pi$  的值。在数学史上留下不朽的篇章。

作为  $\pi$  的计算的最早的科学的尝试看来是阿基米德的工作。公元前 240 年左右，阿基米德利用计算  $\pi$  的古典方法——计算圆内接正多边形和圆外切正多边形周长的方法，得出了这样的事实： $\pi$  介于  $\frac{223}{71}$  和  $\frac{22}{7}$  之间。

公元前 150 年左右，在阿基米德以后的第一个值得提及的  $\pi$  的值是由亚历山大里亚的克罗狄乌斯·托勒密在他的《大辑》里给出的，这是古希腊的最伟大的天文学著作。在这

一著作中所给出的  $\pi$  值是  $3.8'30''$ ——这里所使用的是六十进制制, 也即  $\frac{377}{120}$ , 或 3.1416。这个数值是从论著中所刊登的弦表推算出来的。

公元 462 年, 我国的祖冲之给出了  $\pi$  的一个有趣的有理近似值:  $\frac{355}{113} = 3.1415929\dots$ , 这一数值准确到了六位小数。

在这以后, 有

1630 年, 格林贝格利用斯涅耳的改进方法计算  $\pi$  至 39 位小数, 这是通过多边形的周长去计算  $\pi$  值的最后的重要尝试。

1650 年, 英国数学家约翰·瓦里斯得出了下面的奇怪的表达式:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}$$

皇家学会的第一任主席布隆克爵士, 把瓦里斯的结果变为连分数。

但这两个表达式都没有被用于  $\pi$  值的大规模计算。

1706 年, J·麦金利用级数得出了  $\pi$  的 100 位小数。

1841 年, 英国的威廉·卢瑟福利用级数计算  $\pi$  至 208 位, 后来发现其中的前 152 位是正确的。

最了不起的  $\pi$  人工计算要算是 Z·达什——这是一个闪电般的计算者, 他在 1844 年算出了  $\pi$  的准确的 200 位数字。他曾在 54 秒内完成了两个 8 位数的乘法, 在 6 分钟内完成了两个 20 位数的乘法, 在 40 分钟内完成了两个 40 位数的乘法, 而在 8 小时又 45 分钟内完成了两个 100 位数的乘法, 他也曾在 52 分钟内算得一个 100 位数的平方根。

1873 年英国的威廉·桑克斯计算  $\pi$  至 707 位, 在很长的时间内, 这一直是所曾进行过的关于  $\pi$  的计算中最惊人的结果。1946 年, 英国的 D·F·弗格森发现桑克斯的计算从 528 位开始是错误的, 他于 1947 年 1 月给出了  $\pi$  的准确的 701 位数字。在同一个月中, 美国的 J·W·雷恩奇也发表了  $\pi$  的 808 位数值, 但弗格森立即发现了其中在第 723 位上的错误。1948 年 1 月, 弗格森和雷恩奇联合发表了经过检查的正确的  $\pi$  的 808 位数字。

1777 年, 德·布丰设计了著名的“小针问题”, 借助它可以通过概率的方法来得出  $\pi$  的近似值。1901 年, 意大利人拉兹瑞尼得出利用这种方法的最佳结果: 他只抛了 3408 次就得出  $\pi$  的六位准确的小数! 但是, 由于这一结果远远佳于其他的实验者所得出的结果, 因此, 人们对此有时是有所怀疑的。此外, 也还有其他的计算  $\pi$  的概率方法。

随着计算机的出现, 计算  $\pi$  的准确数字的位数快速增加。

1949 年, 在美国马里兰州阿伯丁的军队炸药研究中心中, 用电子计算机计算  $\pi$  至第 2037 位小数。

1959 年, F·谢纽斯在巴黎用计算机计算  $\pi$  至 16167 位小数。

60 年代则达到五十万位。

70 年代的最高纪录是一百万位。

80 年代后期, 已经有人将  $\pi$  精确计算到一亿位数字。

1995 年的最高纪录是 6,442,450,938 位, 简直不可思议。

为什么人们要如此精确地计算  $\pi$  的值呢？总起来说有三个方面的原因：一是检查电子计算机硬件和软件的完整性以及计算方法的有效性。二是为了研究  $\pi$  的数字分布规律。第三个方面的动机可能最根本，是人类的一种进取精神。创造计算  $\pi$  的世界纪录，如同征服了人类从未攀登过的高山，如同创造了一项新的百米赛跑纪录，令人激动不已。人们在  $\pi$  的演武场，竟显人的智慧与功力，接受着来自最美丽的图形——圆的挑战。

最后，还要说一说祖冲之关于圆周率的计算，他得到这样两项成果：

(1) 圆周率的小数近似值

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927。$$

(2) 圆周率的近似分数

$$\text{密率 } \pi = \frac{355}{113}, \text{ 约率 } \pi = \frac{22}{7}。$$

它们都是具有世界历史意义的成果。第(1)项是具有 8 位准确数字的圆周率的近似值，其重要之处还在于他由不足和过剩两个方面作了“逼近”性近似，他的这项成果直到 1424 年前才为阿拉伯学者卡西所超越。第(2)项中的密率是  $\pi$  的一个具有独特性质的近似分数：它是所有分母小于 16604 的分数中与  $\pi$  值最接近的最佳近似分数！祖冲之的这两大成就在世界上均保持领先地位 1000 余年。

## 【附录】

### 一、【祖冲之简介】



祖冲之，字文远，生于公元 429 年，卒于公元 500 年。他的祖籍是范阳郡蓟县（现河北省涿源县）。他是南北朝时代南朝宋齐之间的一位杰出的科学家。他不仅是一位数学家，同时还通晓天文历法、机械制造、音乐，并且是一位文学家。

祖冲之注解了我国历史上的名著《九章算术》。他接受了刘徽算圆周率的方法，但是他并不满足于刘徽的结果  $3.14\frac{64}{125}$ ，他进一步计算，算到圆内接正 1536 边形，得出圆周率

$3.1416$ 。但是他还不满足于这一结果，又推算下去，用一丈作为圆的直径，并把它分为一亿等份，计算得圆周率

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927。$$

这一结果的重要意义在于指出误差范围。

祖家世代都对天文历法有研究，他比较容易接触到数学的文献和历法资料，因此他从小对数学和天文学就发生兴趣。用他自己的话来说，他从小就“专攻数术，搜炼古今”，这“搜”、“炼”两个字，刻划出他的治学方法和精神。他不但阅读祖辈相传的文献资料，还主动寻找各个时代的各项文献和观察记录。他不仅阅读了这些文献资料，并且把自己所

搜集到的资料经过消化，据为己有。他广博地学习和消化了古人的成就和古代的资料，但是不为古人所局限，他决不“虚推古人”。

他在历法方面测出了地球绕日一周的时间是 365. 24281481 日，跟现在知道的数据 365. 2422 对照，他的数值准确到小数第三位。他提出了把农历的 19 年 7 闰改为 391 年 144 闰的主张。

祖冲之的天文学成就得到世界的公认，1959 年，当人类第一次看到月球背面的景观时，用人类历史上著名的天文学家的名字为它们命名，其中有一座环形山就被命名为“祖冲之山”。

祖冲之是一位通才式科学家，他对各种机械作过深入研究，他重造了指南车，改进了水碓磨，创制了一艘“千里船”以及当时用的计时器——漏壶。人称他“精通‘钟律’，独步一时”，他还写过小说《述异记》十卷，注过经书《易经》、《论语》、《孝经》等。他著作颇丰，见于记载的有：《缀术》、《九章述义注》、《大明历》、《驳论》、《安边论》、《述异记》、《易老庄义释》、《论语孝经注》等，但多已失传，留传至今的仅有《大明历》、《驳论》等少数几篇。

祖冲之的数学专著《缀术》已经失传，《隋书》中写道：“……祖冲之……所著书，名为缀术，学官莫能究其深奥，是故废而不理。”这是我国数学史上的一个重大损失。

## 二、【祖冲之的故事】

祖冲之从小就读了不少书，人家都称赞他是个博学的青年。他特别爱好研究数学，也喜欢研究天文历法，经常观测太阳和星球运行的情况，并且做了详细记录。

宋孝武帝听到他的名气，派他到一个专门研究学术的官署“华林学省”工作。他对做官并没有兴趣，但是在那里，可以更加专心研究数学、天文了。

我国历代都有研究天文的官，并且根据研究天文的结果来制定历法。到了宋朝的时候，历法已经有很大进步，但是祖冲之认为还不够精确。他根据他长期观察的结果，创制出一部新的历法，叫做“大明历”（“大明”是宋孝武帝的年号）。这种历法测定的每一回归年（也就是两年冬至点之间的时间）的天数，跟现代科学测定的相差只有五十秒；测定月亮环行一周的天数，跟现代科学测定的相差不到一秒，可见它的精确程度了。

公元 462 年，祖冲之请求宋孝武帝颁布新历，孝武帝召集大臣商议。那时候，有一个皇帝宠幸的大臣戴法兴出来反对，认为祖冲之擅自改变古历，是离经叛道的行为。祖冲之当场用他研究的数据回驳了戴法兴。戴法兴依仗皇帝宠幸他，蛮横地说：“历法是古人制定的，后代的人不应该改动。”祖冲之一点也不害怕。他严肃地说：“你如果有事实根据，就

只管拿出来辩论。不要拿空话吓唬人嘛。”宋孝武帝想帮助戴法兴，找了一些懂得历法的人跟祖冲之辩论，也一个个被祖冲之驳倒了。但是宋孝武帝还是不肯颁布新历。直到祖冲之死了十年之后，他创制的大明历才得到推行。

### 三、【圆周率的名称及其符号】

我国古代，人们经过大量实践，认识了圆周率，并估计出圆的周长是其直径的三倍，后人便把这一值称为古率。刘徽由于对古率不满，创造了割圆术求出圆周率近似值为  $\pi = \frac{157}{50}$ ， $\pi = \frac{3927}{1250}$ ，并称为徽率或徽术。祖冲之算出其近似值为  $\pi = \frac{22}{7}$ ， $\pi = \frac{355}{113}$ ，称前者为约率，后者为密率。十六世纪，荷兰数学家鲁道夫·范寇勒恩于 1596 年求出圆周率近似值小数点后十五位数字，然后又算到三十五位数字，并把这一值刻在他的墓碑上。后人为了纪念他，便把圆周率的近似值叫做鲁道夫数。可见，在此之前，圆周率没有固定名称，有的称为圆周率，有的是以创造人的姓名命名的，有的则以近似值的特点命名。

1647 年，英国数学家奥特雷特使用  $\frac{\pi}{\delta}$  表示圆周率的近似值  $\frac{22}{7}$  或  $\frac{355}{113}$ 。他便成为使用符号  $\pi$  表示圆周率的先驱。英国数学家琼斯于 1706 年便改用符号  $\pi$  表示圆周率，大数学家欧拉于 1737 年也用  $\pi$  表示圆周率，从此，人们便逐渐地用  $\pi$  来表示圆周率了。

后来，我国对圆周率的命名仍不一致。有的称为圆率，有的称为圆率，有的称为密率，也有的称为周率。至于符号也较紊乱。李善兰在《代微积拾级》里用“周”字代表  $\pi$  以表示圆周率；而《形学备旨》、《代数备旨》则以“门”表示  $\pi$ 。直到二十世纪初期，我国数学著作由竖排改为横排，才比较统一地以  $\pi$  表示圆周率。《初级算学》说：“圆周与直径之比，平常表示以  $\pi$ ”。