

应用教学案例 01

“投入产出”模型

国民经济各部门之间存在某种连锁关系，一个经济部门依赖于其他经济部门的产品或者半成品，同时也为其他部门提供产品或者半成品.如何在特定的经济形式下确定各经济部门的产出水平，做出宏观调控，以满足整个社会的经济需要是一个非常重要的问题.美国经济学家 Wassily Leontief 提出的“投入产出”模型，利用数学方法综合描述各经济部门之间产品的生产和消耗关系的一种经济模型，在各个国家得到广泛的应用，他还因此获得了 1973 年的 Nobel 经济学奖.



图 1 煤炭、钢铁和电力三个国民经济部门

【模型准备】假设一个经济体系由煤炭、钢铁和电力三个部门组成，各部门之间的分配如表 1 所示.

表 1 部门分配表

部门的产出分配			采购部门	总产出
煤炭	电力	钢铁		
0.0	0.4	0.6	煤炭	x_1
0.6	0.1	0.2	电力	x_2
0.4	0.5	0.2	钢铁	x_3

其中每一列中的数表示该部门总产出所占的比例. 比如表中第二列, 表示将电力的总产出分配如下: 40%给煤炭部门, 50%给钢铁部门, 剩下的 10%给电力部门. (电力部门把这 10%作为运转费用.) 因所有产出都必须分配, 故每一列的百分比之和为 1.

设 x_1, x_2, x_3 分别表示煤炭、电力、钢铁部门年度总产出的价格 (即货币价值), 求出平衡价格, 使每个部门的收支平衡.

【模型假设】 假设不考虑价格变动等其他因素.

【模型建立与求解】 在上表 1 中, 部门所在列表示它的产出去向, 所在行表示它从哪些部门获得了收入, 因此为了获得收支平衡, 可以建立线性方程组

$$\begin{cases} x_1 = 0.4x_2 + 0.6x_3 \\ x_2 = 0.6x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3, \\ x_3 = 0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 \end{cases}$$

合并整理可以得到
$$\begin{cases} x_1 - 0.4x_2 - 0.6x_3 = 0 \\ -0.6x_1 + 0.9x_2 - 0.2x_3 = 0, \\ -0.4x_1 - 0.5x_2 + 0.8x_3 = 0 \end{cases}$$

由
$$\begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 \\ -0.6 & 0.9 & -0.2 \\ -0.4 & -0.5 & 0.8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.94 \\ 0 & 1 & -0.85 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 可得 $x_1 = 0.94x_3, x_2 = 0.85x_3$

x_3 为自由变量. 这个经济问题的平衡价格向量为

$$p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.94 \\ 0.85 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

【结论分析】任意非负 c 取值可以算出平衡价格的一种取值. 例如, 如果 c 取值为 10 亿, 即钢铁部门的年度总产出为 10 亿元, 则可知煤炭部门的总产值为 9.4 亿元, 电力部门的总产值为 8.5 亿元.

参考文献

- [1] David C.Lay, 线性代数及其应用, 刘深泉等译, [M]. 北京: 机械工业出版社, 2018. ISBN: 978-7-111-60257-6.
- [2] 东北大学数学系 宋叔尼等. 线性代数及其应用 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2020. ISBN: 978-7-04-053411-5.

应用教学案例 02

剑桥食谱与营养饮食

剑桥食谱是一种曾经在 20 世纪 80 年代很流行的食谱,是由 Alan H. Howard 博士领导的科学家团队经过 8 年对过度肥胖病人的临床研究,在剑桥大学完成的.数百万人通过这一方法,实现了有效健康的减肥.

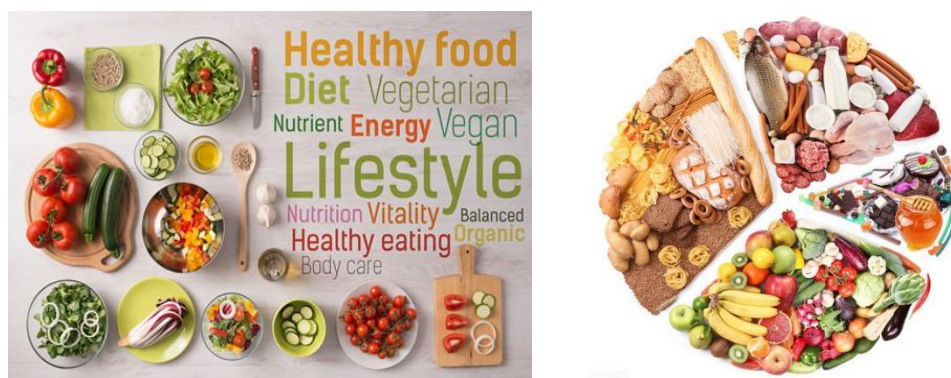


图 1 剑桥食谱

【模型准备】上过营养课后,对苹果奶酪情有独钟的 Annie 决定改善午餐,增加西兰花和鸡肉罐头的摄入量来提高蛋白质和膳食纤维的含量,以达到健康减肥的效果.食物的营养信息在表 1 中给出.

表 1 食物营养信息表

每份食物营养素含量				
营养素	苹果奶酪	西兰花	鸡肉罐头	贝类
卡路里 (卡)	270	51	70	260
蛋白质 (克)	10	5.4	15	9
膳食纤维 (克)	2	5.0	0	5

如果她希望午餐含有 400 卡路里,但要获取 30 克蛋白质、10 克膳食纤维,求苹果奶酪、西兰花和鸡肉罐头之间的比例.

【模型假设】只关注每种食物中所涉及的三种元素的含量，而不考虑维生素、电解质等其他元素；每份食物的重量是相同的。

【模型建立与求解】设 x_1, x_2, x_3 分别表示苹果奶酪、西兰花和鸡肉罐头这些食物的数量. 根据表 1，可以把每种食物三种元素的含量看成一个向量，则有

$$a_1 = \begin{bmatrix} 270 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 51 \\ 5.4 \\ 5.0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 70 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 400 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

所建立的方程为 $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = b$.

把对应的线性方程组的增广矩阵进行初等行变换得

$$B = \begin{bmatrix} 270 & 51 & 70 & 400 \\ 10 & 5.4 & 15 & 30 \\ 2 & 5.0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.99 \\ 0 & 1 & 0 & 1.54 \\ 0 & 0 & 1 & 0.79 \end{bmatrix}.$$

所以苹果奶酪、西兰花、鸡肉罐头之间的比例为：99:154:79.

【模型拓展】Annie 发现西兰花的比例过高，想用全麦面和白切达奶酪取代传统的苹果奶酪，每种食物的比例是多少才能和实现上述问题一样的结果？查阅相关资料完成拓展.

参考文献

- [1] David C.Lay, 线性代数及其应用, 刘深泉等译, [M]. 北京: 机械工业出版社, 2018. ISBN: 978-7-111-60257-6.

应用教学案例 03

化学方程式如何配平？

对于化学反应方程式的配平，可以根据化学反应前后物质所含元素个数相等的原理，对每种物质所含元素的个数列方程组，通过解对应方程组的一组不可约正整数解，即可求得各种物质的配平系数。

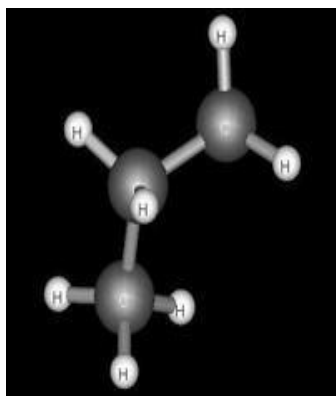


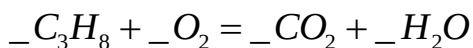
图 1 丙烷物质结构图



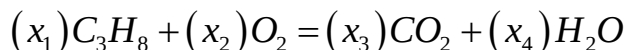
图 2 北京奥运会火炬—祥云

【模型准备】丙烷是一种无毒无色无味的气体，在氧气充足的情况下燃烧，只产生水和二氧化碳，常用作烧烤、便携式炉灶和机动车的燃料。北京奥运会火炬—祥云便是以丙烷作为燃料的，它价格低廉，而且温度范围比较宽，燃烧只形成水蒸气和二氧化碳，没有其他物质，不会对环境造成污染，是一种清洁燃料，符合“绿色奥运”的理念。

丙烷(C_3H_8)与氧气(O_2)结合生成二氧化碳(CO_2)和水(H_2O)，如何配平这一化学方程式呢？



【模型建立和求解】为了配平这个化学方程式，先设 x_1, x_2, x_3, x_4 满足



因为方程式左右两边碳、氢、氧三种元素的原子总数是相同的，所以就可以建立如下的关系式

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

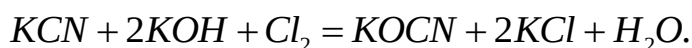
进行初等行变换，化简该方程组的增广矩阵就会得到同解

$$x_1 = \frac{1}{4}x_4, x_2 = \frac{5}{4}x_4, x_3 = \frac{3}{4}x_4, x_4 \text{ 为自由未知量}$$

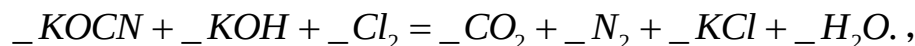
因为化学方程式的系数为整数，故取解 $x_1=1, x_2=5, x_3=3, x_4=4$ 。

配平的方程式为 $C_3H_8 + 5O_2 = 3CO_2 + 4H_2O$ 。

【模型拓展】某厂废水中含有 KCN，其浓度为 620mg/L。现用氯氧化法进行处理，发生如下反应：



投入过量的液氯，可将氰酸盐进一步氧化成氮气，请配平下列化学方程式：



对于复杂的化学反应方程式的配平问题，建立方程组模型之后，建议借助于 MATLAB 等相应软件求解，会容易很多。

参考文献

- [1] David C.Lay,线性代数及其应用，刘深泉等译，[M]. 北京：机械工业出版社，2018. ISBN: 978-7-111-60257-6.
- [2] 陈怀琛、高淑萍、杨威. 工程线性代数[M]. 北京：电子工业出版社，2007. 页码：84-85.

应用教学案例 04

中药配方问题

在化工、医药、日常膳食等方面都经常涉及到配方问题. 在不考虑各种成分之间可能发生某些化学反应时, 配方问题可以用向量和线性方程组来建模. 这里我们就中药药方配制问题为例, 介绍这种解决实际问题的方法.



图 1 中药药方配制

【模型准备】给某中药厂用 9 种中草药（分别记为 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 I ）根据不同比例配制成了 7 种特效药，成分如表 1 所示.

表 1 7 种特效药成分表							(单位: g)
成分	1 号成药	2 号成药	3 号成药	4 号成药	5 号成药	6 号成药	7 号成药
A	10	2	14	12	20	38	100
B	12	0	12	25	35	60	55
C	5	3	11	0	5	14	0
D	7	9	25	5	15	47	35
E	0	1	2	25	5	33	6
F	25	5	35	5	35	55	50
G	9	4	17	25	2	39	25
H	6	5	16	10	10	35	10
I	8	2	12	0	2	8	20

(1) 某医院要购买这 7 种特效药，但药厂的第 3 号药和第 7 号药已经卖完，能否用其他特效药配制出这两种脱销的药品？

(2) 现在该医院想用这 7 种特效药配制出另外 3 种新药，表 2 给出了 3 种新药的成分，能否配制？如果可以，应如何配制？如果不能，请说明理由。

表 2 3 种新药的成分表

(单位: g)

成分	1 号新药	2 号新药	3 号新药
A	40	162	88
B	62	141	67
C	14	27	8
D	44	102	51
E	53	60	7
F	50	155	80
G	71	118	38
H	41	68	21
I	14	52	30

【模型分析】设在药方配制问题中，把每种特效药的成分作为一个列向量，通过分析所给列向量构成的向量组的线性相关性来确定是否可以用现有的药来配制脱销药. 若向量组线性无关，则无法配制脱销的特效药；若向量组线性相关，则可以配制. 而新药的配制问题可转化为一个向量能否用一个向量组线性表示的问题，也可以转化为线性相关性加以解决.

【模型建立与求解】(1) 把每一种特效药都看成一个 9 维列向量，并记为 $u_i (i=1,2,\dots,7)$. 分析这 7 个列向量所构成的向量组的线性相关性. 若向量组线性无关，则无法配制脱销的特效药；若向量组线性相关，并且能找到不含 u_3 和 u_6 的一个极大无关组，则可以用现有的特效药来配制第 3 号和第 6 号脱销的特效药.

设 $U = (u_1, u_2, \dots, u_7)$, 将该矩阵化成行最简形为

$$U \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从行最简形矩阵可以看出, 特效药向量组是线性相关的, 且 $R(U)=5$, 它的一个极大无关组为 u_1, u_2, u_4, u_5, u_7 , 故可以用现有的特效药来配制出第 3 号和第 6 号药品. 由于 $u_3 = u_1 + 2u_2, u_6 = 2u_2 + u_4 + u_5$, 说明用 1 份 1 号药和 2 份 2 号药可以配制出 1 份 3 号药; 3 份 2 号药、1 份 4 号药、1 份 5 号药可以配制出 1 份 6 号药.

(2) 把三种新的特效药分别用列向量 v_1, v_2, v_3 来表示, 即

$$v_1 = (40, 62, 14, 44, 53, 50, 71, 41, 14)^T,$$

$$v_2 = (162, 141, 27, 102, 60, 155, 118, 68, 52)^T,$$

$$v_3 = (88, 67, 8, 51, 7, 80, 38, 21, 30)^T.$$

问题转化为 v_1, v_2, v_3 能否由 $u_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ 这 7 个列向量所构成的向量组线性表示, 若能表示, 则可配制; 否则, 不能配制.

设 $V = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, v_1, v_2, v_3)$, 把该矩阵化成行最简形为

$$V \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从行最简形矩阵的后 3 列可以看出：

$$v_1 = u_1 + 3u_2 + 2u_4, v_2 = 3u_1 + 4u_2 + 2u_4 + u_7$$

v_3 不能由 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ 线性表示. 即 1 号新药和 2 号新药可以由原来的 7 种特效药来配制, 但是 3 号新药不能由 7 种特效药配制而成.

【结论】本例给出了一个中成药配制问题, 设计向量组的线性相关性、向量组的极大线性无关组、向量的线性表示以及向量空间等线性代数的知识. 当向量的维数较高, 个数较多时, 用 Matlab 软件较容易做出解答.

参考文献

[1] 郭文艳. 线性代数应用案例分析[M]. 北京: 科学出版社, 2019.

ISBN: 978-7-03-062134-4.

应用教学案例 05

图像噪声的去除

数字图像是由一系列像素点构成的.从数学的视角看,图像可以用矩阵表示.以灰度图像为例,图像的像素点对应矩阵中的元素,每个像素点的位置和灰度值分别对应矩阵中元素的位置和取值.因此,数字图像的处理通常利用矩阵的运算来处理.

数字图像在获取和传输的过程中会受到各种噪声的干扰,噪声会妨碍人们对图像的理解,而图像去噪就是去除图像中的噪声,提高人们对图像的认识程度,以便对图像作进一步地处理。这里以加性噪声为例,简单介绍一下借助矩阵运算去除噪声的应用.

【模型准备】图(a)和图(b)是两幅受到不同程度的加性噪声污染的图像,试利用矩阵的线性运算对该图像实现噪声的去除.

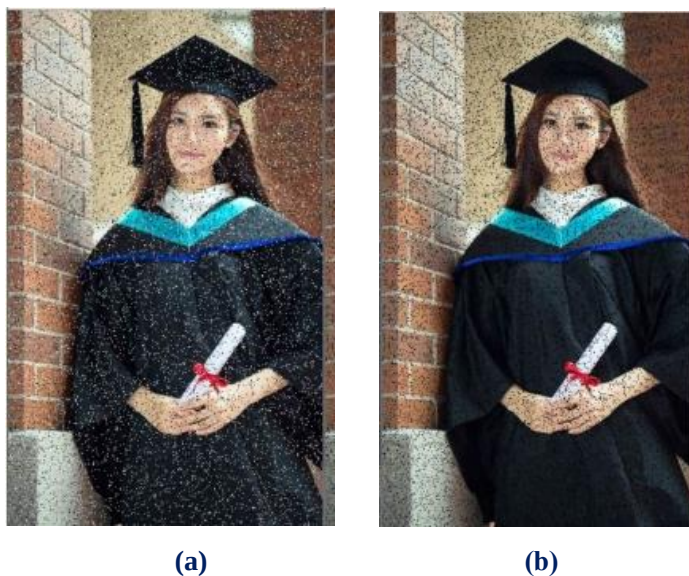


图 1 受噪声污染的图像

【模型分析】同一场景的多幅图像求平均值可以降低加性噪声的影响,这一算法在数学上即可通过矩阵加法和数乘运算实现.

【模型建立与求解】将图(a)和图(b)对应的矩阵相加，然后与数 0.5 作数乘运算，即求了两个矩阵的算术平均，输出如图（c）所示.可以看出，图像中的噪声得到了一定程度的抑制.



图 2 噪声去除后的图像

【结论】矩阵加法和数乘运算可以在一定程度上实现图像中噪声的去除，但是可以看出，图像的一些细节信息也被抹平，图像变模糊了. 因此在实际应用中，还需要结合其他方法在去除噪声的同时，最大限度地保留图像的细节信息.

参考文献

- [1] 郭文艳.线性代数应用案例分析[M].北京：科学出版社，2019.
ISBN: 978-7-03-062134-4.
- [2] 对图片加性噪声的去噪处理，网址
<https://www.cnblogs.com/cyssmile/p/13140201.html>.

图像的伸缩

随着计算机科学技术的发展, 计算机图形学的应用领域越来越广, 如仿真设计、效果图制作、动画片制作、电子游戏开发等. 图形的几何变换, 包括图形的平移、旋转、放缩等, 是计算机图形学中经常遇到的问题. 这里暂时只讨论图像的伸缩.



图 1 计算机图形学的应用

【模型准备】用矩阵运算实现三维图像的伸缩.

【模型分析】设图像的伸缩是图像中点的位置改变引起的一种形状变化. 若将图像 (单指位图) 的每一个点对应空间中的一个列矩阵 (列向量), 图像则看做是有限个点的位置列矩阵构成的集合, 因此可利用矩阵运算来实现图像伸缩. 图像的伸缩实质上是矩阵的乘法运算.

【模型建立与求解】图像的伸缩是将图像沿着 x, y, z 轴的方向分别继续拉伸和压缩, 从而改变图像的形状. 设一个三维图形中的任意一点 $P(x, y, z)$, 经过伸缩后的坐标位置为

$$P^*(x_1, y_1, z_1) = P^*(k_x x, k_y y, k_z z)$$

其中 k_x, k_y, k_z 分别表示 x, y, z 方向的伸缩因子.

用矩阵运算的形式表示点的变化过程为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

称 $K = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$ 为伸缩矩阵. 一个三维图像 A , 伸缩后的图像 B 为

$$B = KA = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_n \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x x_0 & k_x x_1 & \cdots & k_x x_n \\ k_y y_0 & k_y y_1 & \cdots & k_y y_n \\ k_z z_0 & k_z z_1 & \cdots & k_z z_n \end{bmatrix}$$

【结论】 将图像表示成位置列矩阵, 对伸缩矩阵与位置列矩阵做乘法运算即可实现三维图像的伸缩.

参考文献

- [1] 郭文艳. 线性代数应用案例分析[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
ISBN: 978-7-03-062134-4.

应用教学案例 07

太空探测器轨道运行数据问题

太空航天探测器发射以后, 需要不断调整姿态, 以使探测器处在精确计算的轨道里. 如何实现快速计算, 增强数据处理的实时性, 是迫切需要解决的问题.

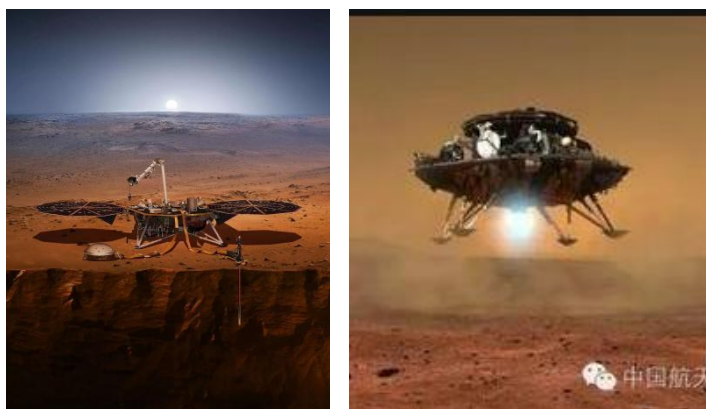


图 1 中国火星探测器

【模型准备】 雷达监测到一组列向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$, 它们给出了不同时刻探测器实际位置与预定轨道之间的偏差信息. 令 $\mathbf{X}_k = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k]$, 在雷达进行数据分析时需要计算出矩阵 $\mathbf{G}_k = \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T$, 一旦接收到数据向量 $\mathbf{x}_{k+1}$, 必须计算出新矩阵 $\mathbf{G}_{k+1}$. 因为数据向量到达的速度非常快, 随着 k 的增加, 直接计算的负担会越来越重. 现需要给出一个算法, 使得计算 $\mathbf{G}_k$ 的负担不会因为 k 的增加而加重.

【模型求解】 因为

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T,$$
$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{X}_{k+1} \mathbf{X}_{k+1}^T = [\mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k+1}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k^T \\ \mathbf{x}_{k+1}^T \end{bmatrix} = \mathbf{G}_k + \mathbf{x}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}^T,$$

所以一旦接收到数据向量 $\mathbf{x}_{k+1}$, 只要计算的 $\mathbf{x}_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}^T$, 然后把它与上一步计算得到 $\mathbf{G}_k$ 相加即可. 这样计算 $\mathbf{G}_k$ 的负担不会因为 k 的增加而加重.

【模型分析】计算机计算加法的时间与计算乘法的时间相比可以忽略不计. 因此在考虑计算矩阵乘积的负担时, 只要考察乘法的次数就可以了. 设 $\mathbf{x}_k$ 的维数是 n , 则 $\mathbf{X}_k = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k]$ 是 $n \times k$ 的矩阵, $\mathbf{G}_k = \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T$ 是 $n \times n$ 新的矩阵, 直接计算 $\mathbf{G}_k = \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T$ 需要做 $n^2 k$ 次乘法, 所以计算的负担会随着 k 的增加而增加, 但是对每一个 k , 计算 $\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T$ 始终只需要做 n^2 次乘法.

参考文献

- [1] David C. Lay, 线性代数及其应用, 沈复兴, 傅莺莺等译, 北京: 人民邮电出版社, 2009. 页码: 123.

应用教学案例 08

机械手的空间位置

雅可比矩阵在机器人运动学分析、静力学分析和动力学分析以及图形识别等理论中均有重要应用，是机器人运动学研究中的重要工具，对应的雅可比行列式在机器人运动学分析中扮演着重要的角色。

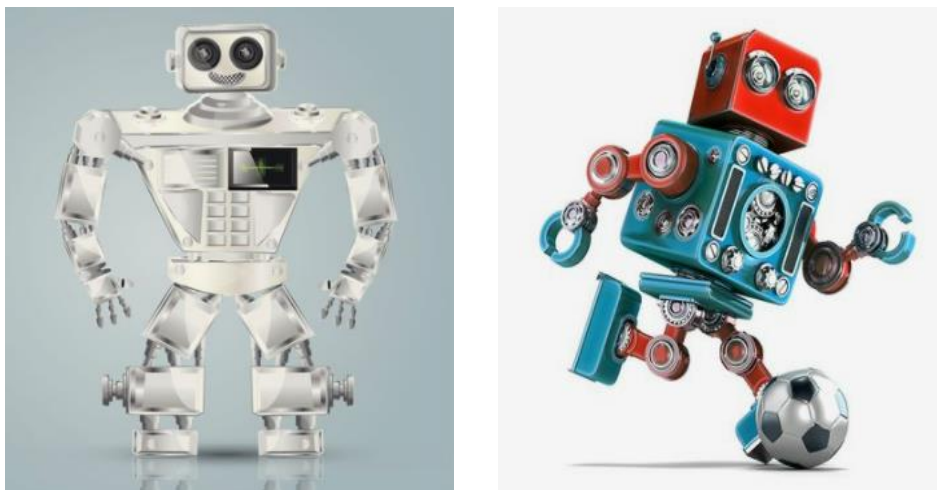


图 1 机器人

【模型准备】考虑两自由度的平面机械手，如图 1 所示. 设两杆机械手只在铅垂平面内运动. 已知机械手末端的坐标值为 (x, y) ，两个机械手臂长为 l_1, l_2 ，与 x 轴正向夹角分别为 θ_1, θ_2 . 试给出机械手在操作空间和关节空间的位置关系.

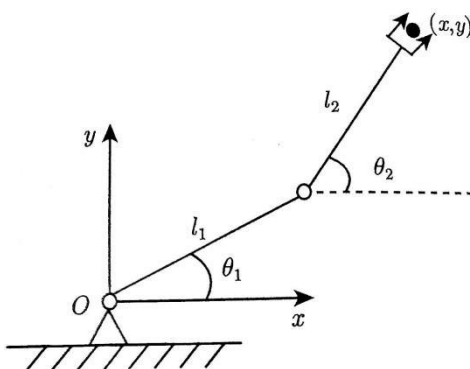


图 2 两自由度的平面机械手示意图

【模型分析】若能利用机械手臂长度与 x 轴正向夹角来刻画机械手的位置，可借助函数的微分关系来描述关节与机械手的微小运动。

【模型建立与求解】根据几何关系建立机械手在操作空间和关节空间的位置关系。水平 x 方向满足关系： $x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2$ ，铅直 y 方向满足关系： $y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$ ，则机械手末端位置为

$$\begin{cases} x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \\ y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \end{cases}$$

两边微分可得

$$\begin{cases} dx = -l_1 \sin \theta_1 d\theta_1 - l_2 \sin \theta_2 d\theta_2 \\ dy = l_1 \cos \theta_1 d\theta_1 + l_2 \cos \theta_2 d\theta_2 \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 & -l_2 \sin \theta_2 \\ l_1 \cos \theta_1 & l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}$$

简记为

$$dr = Jd\theta$$

其中， J 为机械手的雅可比矩阵，该矩阵反映了机械手关节微小位移 $d\theta$ 与手部微小运动 dr 之间的关系。

对 $dr = Jd\theta$ 两端同时除以 dt ，得 $v = Jw$ 。其中， w 和 v 分别表示关节速度 $w = \frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{d\theta_1}{dt}, \frac{d\theta_2}{dt} \right]^T$ 和手部速度 $v = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right]^T$ 。雅可比矩阵给出了关节的微小运动（或速度）与手部微小运动（或速度）之间的传递关系。

当雅可比行列式不为零时，若已知机械手手部的微小运动，则可通过计算雅可比矩阵的逆得到机械手关节上的微小运动（或速度），

进而得到每个关节需要以多快的速度运动，才能使机械手的手部产生所期望的微小运动（或速度）。

【结论】该雅可比矩阵建立了手部操作所在空间与关节所在空间的联系，它清晰刻画了机械手随时间变化的关系。雅可比行列式可进一步分析两者之间的联系。

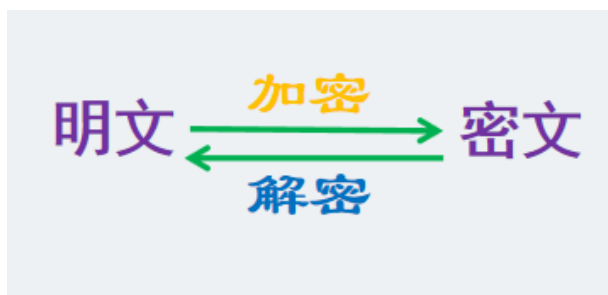
参考文献

- [1] 郭文艳. 线性代数应用案例分析[M]. 北京：科学出版社，2019.
ISBN: 978-7-03-062134-4.

应用教学案例 09

加密与解密

密码学在经济和军事方面起着极其重要的作用. 密码学中将信息代码称为密码, 尚未转换成密码的文字信息称为明文, 密码表示的信息称为密文. 从明文到密文的过程称为加密, 反之为解密. 1929 年, 希尔(Hill)通过线性变换对待传输信息进行加密处理, 提出了在密码史上有重要地位的希尔加密算法. 下面我们略去一些实际应用中的细节, 只介绍最基本的思想.



【模型准备】若要发出信息 action, 现需要利用矩阵乘法给出加密方法和加密后得到的密文, 并给出相应的解密方法.

【模型假设】(1) 假定每个字母都对应一个非负整数, 空格和 26 个英文字母依次对应整数 0~26(见下表).

表 1 空格及字母的整数对应表

空格	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	

(2) 假设将单词中从左到右, 每 3 个字母分为一组, 并将对应的 3 个整数排成 3 维的行向量, 加密后仍为 3 维的行向量, 其分量仍为整数.

【模型建立】 设 3 维向量 x 为明文，要选一个矩阵 A 使密文 $y = xA$ ，还要确保接收方能由 y 准确地解出 x 。因此矩阵 A 必须是一个 3 阶可逆矩阵。这样就可以由 $y = xA$ 解出 $x = yA^{-1}$ 。为了避免小数引起误差，并且确保 y 也是整数向量， A, A^{-1} 的元素应该都是整数。注意到，当整数矩阵 A 的行列式为 ± 1 时，其逆矩阵也是整数矩阵，因此原问题可以转化为

- (1) 把 **action** 转化为两个行向量： x_1, x_2 。
- (2) 构造一个行列式的值为 ± 1 的整数矩阵 A （当然不能取 $A=E$ ）。
- (3) 计算 x_1A, x_2A 。
- (4) 计算 A^{-1} 。

【模型求解】 (1) 由上述假设可见 $x_1 = (1, 3, 20), x_2 = (9, 15, 14)$ 。

(2) 为了得到合适的矩阵 A ，对 3 阶单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 进行适当的

初等变换，根据行列式的性质，这样得到的矩阵的行列式的值为 ± 1 。

例如矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ，该矩阵行列式的值为 -1。

$$(3) \quad y_1 = x_1A = (1, 3, 20) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (67, 44, 43),$$

$$y_2 = x_2A = (9, 15, 14) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (81, 52, 43).$$

$$(4) \text{ 由 } (A, E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ 可得 } A \text{ 的}$$

$$\text{逆矩阵 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

这就是说，接收方收到的密文是 67, 44, 43, 81, 52, 43. 要还原成明文，只要计算 $(67, 44, 43)A^{-1}$ 和 $(81, 52, 43)A^{-1}$, 再对照表 1 “翻译”成单词即可.

【模型分析】 如果要发送一个英文句了，在不记标点符号的情况下，我们仍然可以把句子(含空格)从左到右每 3 个字符分为-组(最后不足 3 个字母时用空格补上).

$$\text{【模型检验】 } (67, 44, 43)A^{-1} = (1, 3, 20), \quad (81, 52, 43)A^{-1} = (9, 15, 14).$$

参考文献

[1] 杨威，高淑萍，线性代数机算与应用指导，西安：西安电子科技大学出版社, 2009. 页码: 98-102.

应用教学案例 10

显示器色彩制式的转换问题

彩色显示器使用红(R)、绿(G)和蓝(B)光的叠成效应生成颜色.显示器屏幕的内表面由微粒像素组成,每个微粒包括三个荧光点:红、绿、蓝.电子枪位于屏幕的后方,向屏幕上每个点发射电子束.计算机从图形应用程序或扫描仪发出数字信号到电子枪,这些信号控制电子枪设置的电压强度.不同 RGB 的强度组合将产生不同的颜色.电子枪由电磁石帮助瞄准以确保快速精确地屏幕刷新.

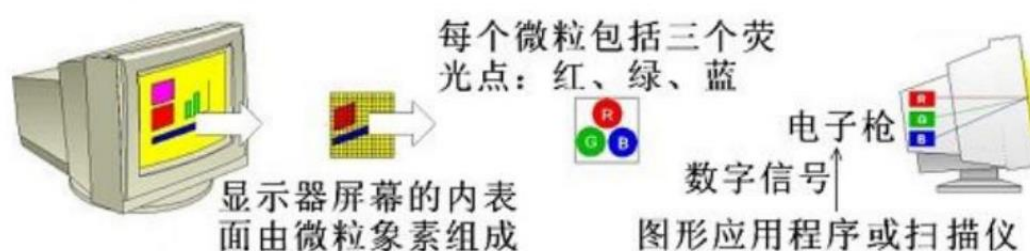


图 1 彩色显示器的工作原理

颜色模型规定一些属性或原色,将颜色分解成不同属性的数字化组合.这就色彩制式的转换问题.

【模型准备】观察者在屏幕上实际看到的色彩要受色彩制式和屏幕上荧光点数量的影响.因此每家计算机屏幕制造商都必须在(R, G, B)数据和国际通行的 CIE 色彩标准之间进行转换,CIE 标准使用三原色,分别称为 X, Y 和 Z.针对短余辉荧光点的一类典型转换是

$$\begin{pmatrix} 0.61 & 0.29 & 0.150 \\ 0.35 & 0.59 & 0.063 \\ 0.04 & 0.12 & 0.787 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

计算机程序把用 CIE 数据(X, Y, Z)表示的色彩信息流发送到屏幕.求屏幕上的电子枪将这些数据转换成(R,G,B)数据的方程.

【模型建立】 令 $A = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.29 & 0.150 \\ 0.35 & 0.59 & 0.063 \\ 0.04 & 0.12 & 0.787 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, 则 $A\alpha = \beta$. 现在要

根据 CIE 数据 (X,Y,Z)计算对应的 (R,G,B)数据, 就是方程 $A\alpha = \beta$ 中 A, β 已知, 求 α . 若 A 是可逆矩阵, 则 $\alpha = A^{-1}\beta$.

【模型求解】 如果用求逆矩阵的方法直接计算, 会很麻烦, 因此在这种实际问题中, 求解逆矩阵往往要借助于计算机软件。在 Matlab 命令窗输入以下命令

```
>>A = [0. 61, 0. 29, 0. 15;0. 35, 0. 59, 0. 063;0. 04, 0. 12, 0. 787];
```

```
>> if det (A) ==0, 'A 不可逆'
```

```
elseif 'A 可逆, A 的逆矩阵如下', B = inv (A),
```

```
end
```

Matlab 执行后得

B=

```
2.2586   -1.0395   -0.3473
-1.3495    2.3441    0.0696
0.0910   -0.3046    1.2777
```

因此 $\alpha = \begin{pmatrix} 2.2586 & -1.0395 & -0.3473 \\ -1.3495 & 2.3441 & 0.0696 \\ 0.0910 & -0.3046 & 1.2777 \end{pmatrix} \beta$.

也就是说屏幕上的电子枪将 CIE 数据 (X,Y,Z) 转换成 (R,G,B) 数据的方程为

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2586 & -1.0395 & -0.3473 \\ -1.3495 & 2.3441 & 0.0696 \\ 0.0910 & -0.3046 & 1.2777 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

参考文献

[1] David C. Lay, 线性代数及其应用, 沈复兴, 傅莺莺等译, 北京: 人民邮电出版社, 2009. 页码: 147.

应用教学案例 11

数字图像的压缩

随着计算机和网络技术的不断发展,数字图像的应用愈加的广泛.但是,数字图像的数据量通常比较大,在不同用户与系统之间相互传输时会造成一定的困扰,因此人们发明了很多的方法,去除数字图像数据中的冗余信息,实现对数字图像的有效压缩.利用线性代数中的正交变换法,也可以实现对数字图像的压缩,下面就简单举一个例子来加以说明.

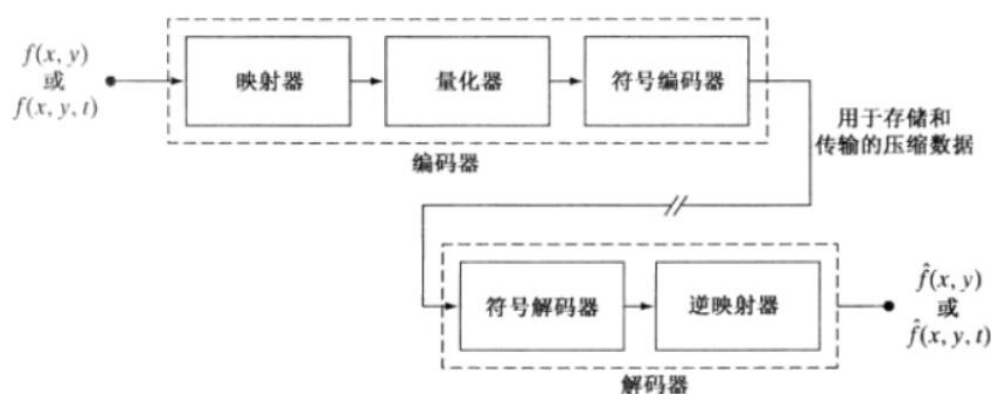


图 1 通用图像压缩系统的功能方框图

【模型准备】如图截取 Lenna 图像中大小为 8×8 的一块.设有正交变换矩阵

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7071 & 0 & 0 & 0.5 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0 & 0 & 0.7071 & 0 & 0 & 0.5 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7071 & 0 & -0.5 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 0 & -0.5 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0 & 0.7071 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & -0.3536 & 0.3536 \\ 0 & -0.7071 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & -0.3536 & 0.3536 \\ -0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -0.3536 & 0.3536 \\ 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -0.3536 & 0.3536 \end{bmatrix}$$

利用正交变换对截取图像继续压缩，并说明压缩效果。

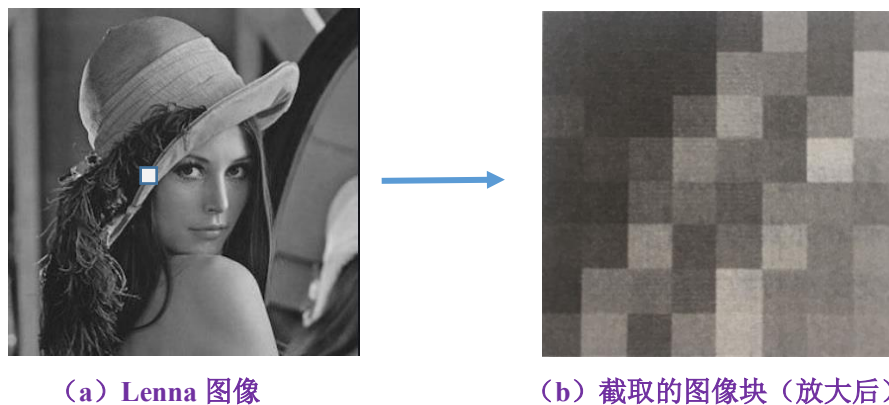


图 2 图像截取

【模型分析】将取出的图像块用矩阵表示，矩阵中的元素表示图像块中对应位置的像素灰度值，然后用给定的正交矩阵分别对图像块矩阵的行和列实施正交变换，观察结果，以期将图像块矩阵中尽可能多的元素变为 0 或者绝对值接近 0，从而进一步实现数据压缩。

【模型建立与求解】利用 Matlab 软件中的 `imread` 命令读图像块，读取数据对应的矩阵记为 A ，则

$$A = \begin{bmatrix} 225 & 210 & 118 & 202 & 80 & 110 & 200 & 105 \\ 168 & 142 & 240 & 191 & 123 & 61 & 175 & 76 \\ 88 & 93 & 132 & 36 & 15 & 150 & 116 & 222 \\ 75 & 180 & 226 & 4 & 251 & 195 & 145 & 3 \\ 87 & 142 & 44 & 228 & 149 & 136 & 203 & 198 \\ 136 & 115 & 250 & 52 & 106 & 162 & 16 & 249 \\ 184 & 180 & 68 & 74 & 130 & 51 & 155 & 252 \\ 80 & 160 & 65 & 168 & 83 & 98 & 10 & 200 \end{bmatrix}$$

作正交变换 $M^T A M$ ，并用 `uint8( $M^T A M$ )` 转换为 8 位无符号数据矩阵，结果记作 B ，则

$$B = \begin{bmatrix} 46 & 0 & 42 & 48 & 0 & 0 & 58 & 0 \\ 0 & 34 & 38 & 191 & 2 & 3 & 0 & 51 \\ 0 & 46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 95 & 50 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 21 & 38 & 15 & 43 & 6 & 81 & 56 & 0 \\ 0 & 39 & 0 & 125 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 47 & 0 & 0 & 255 & 17 \\ 186 & 17 & 10 & 95 & 5 & 18 & 16 & 59 \end{bmatrix}$$

【结论】 与 A 相比, B 中很多元素变为 0, 由于存储或传输时只需要存储或者传输非零元素的位置和数值, 且通过 $A = MBM^T$ 解码就能得到原图像块, 因此该正交变换对数字图像数据压缩是有效的.

参考文献

- [1] 郭文艳. 线性代数应用案例分析[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
ISBN: 978-7-03-062134-4.

应用教学案例 12

金融公司支付基金的流动

资金流动情况蕴含着重要的信息,对于投资决策和经济管理都具有重要的参考价值.根据这些信息,人们可以预测未来的资金变化趋势,从而做出必要的干预措施或调整原来的计划.



图 1 资金流动方式

【模型准备】金融机构为保证现金充分支付,设立一笔总额 5400 万的基金,分开放置在位于 A 城和 B 城的两家公司,基金在平时可以使用,但每周末 0 结算时必须确保总额仍然为 5400 万.经过相当长的一段时期的现金流动,发现每过一周,各公司的支付基金在流通过程中多数还留在自己的公司内,而 A 城公司有 10%支付基金流动到 B 城公司.B 城公司则有 12%支付基金流动到 A 城公司.起初 A 城公司基金为 2600 万,B 城公司基金为 2800 万.按此规律,两公司支付基金数额变化趋势如何? 如果金融专家认为每个公司的支付基金不能少于 2200 万,那么是否需要在必要时调动基金?

【模型建立】设第 $k+1$ 周末结算时, A 城公司 B 城公司的支付基金数分别为 a_{k+1}, b_{k+1} (单位:万元), 则有 $a_0 = 2600, b_0 = 2800$,

$$\begin{cases} a_{k+1} = 0.9a_k + 0.12b_k \\ b_{k+1} = 0.1a_k + 0.88b_k \end{cases}.$$

原问题转化为：

(1) 把 a_{k+1}, b_{k+1} 表示成 k 的函数，并确定 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ 和 $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k$.

(2) 看 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ 和 $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k$ 是否小于 2200.

【模型求解】 由 $\begin{cases} a_{k+1} = 0.9a_k + 0.12b_k \\ b_{k+1} = 0.1a_k + 0.88b_k \end{cases}$ 可得

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{pmatrix}^{k+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

令 $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = A^{k+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = A^{k+1} \begin{pmatrix} 2600 \\ 2800 \end{pmatrix}$. 为了计算矩阵 A 的高次

幂，要对矩阵 A 进行对角化. 借助于 **Matlab**，可以更方便地得出结论.

在 **Matlab** 命令窗口输入以下命令

```
>>A = [0.9, 0.12; 0.1, 0.88];
```

```
>> [P,D] = eig(A)
```

Matlab 执行后得

P=

```
0.7682 -0.7071  
0.6402 0.7071
```

D=

```
1.0000 0  
0 0.7800
```

也就是说， $P^{-1}AP = D, A = PDP^{-1}, A^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$. 因此可以得出

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = A^{k+1} \begin{pmatrix} 2600 \\ 2800 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.78^{k+1} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 2600 \\ 2800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32400}{11} - \frac{3800}{11} \left(\frac{39}{50}\right)^{k+1} \\ \frac{27000}{11} + \frac{3800}{11} \left(\frac{39}{50}\right)^{k+1} \end{pmatrix}.$$

因为 $\frac{39}{50} < 1$,

可见 $\{a_k\}$ 单调递增, $\{b_k\}$ 单调递减, 并且 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \frac{32400}{11}, \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \frac{27000}{11}$.
而 $\frac{32400}{11} \approx 2945.45 > 2200, \frac{27000}{11} \approx 2454.54 > 2200$, 所以不需要调动基金.

参考文献

- [1] 郭文艳. 线性代数应用案例分析[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
ISBN: 978-7-03-062134-4.

应用教学案例 13

人口迁移问题

人口迁移一般指的是人口在两个地区之间的空间移动,这种移动通常涉及人口居住地由迁出地到迁入地的永久性 or 长期性的改变.在一定时间、一定范围内,人口迁移往往呈现出一定的周期性规律,根据这些规律,我们可以做出某些预测.

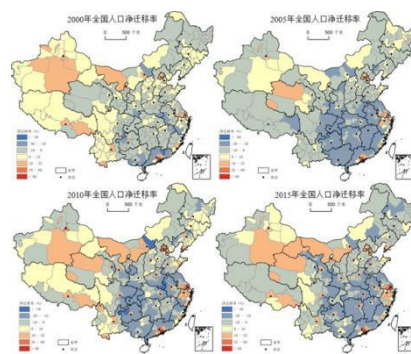


图 1 人口迁移图

【模型准备】有甲、乙两个地区,甲地每年有 30%的人迁入乙地,乙地每年有 20%的人迁入甲地.假设甲地有 60 万人口,乙地有 40 万人口,且两地区总人口保持不变,则 5 年后,甲地和乙地的人口分别是多少?经过很长时间后,两地人口的分布会趋于一个“稳定状态吗”?

【模型建立】设第 n 年甲地人口为 x_n 人,乙地人口为 y_n 人,则有

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.7x_n + 0.2y_n \\ y_{n+1} = 0.3x_n + 0.8y_n \end{cases}$$

若记

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad z_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

则两地人口迁移模型为

$$z_{n+1} = Az_n, n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 = [60, 40]^T.$$

那么 $n+1$ 年后, 两地人口为

$$z_{n+1} = Az_n = A^2 z_{n-1} = \cdots = A^{n+1} z_0.$$

【模型求解】通过把方阵 A 对角化求解 A^n . 经过计算可得矩阵 A 的特征

值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5$. 对应的特征向量分别是 $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. 记

$$P = [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.6 & -0.4 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

则 5 年后两地人口为

$$z_5 = A^5 z_0 = P \Lambda^5 P^{-1} z_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.5)^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.6 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.625 \\ 59.375 \end{bmatrix}.$$

即 5 年后, 甲地有 40.625 万人, 乙地有 59.375 万人.

n 年后两地人口为

$$z_n = A^n z_0 = P \Lambda^n P^{-1} z_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.5)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.6 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \\ 60 - 40 \cdot \frac{1}{2^n} \end{bmatrix}.$$

【结论】显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix}$. 因此, 经过很长时间后, 两地人口的分布

会趋于稳定, 且甲地有 40 万人, 乙地有 60 万人.

参考文献

[1] 郭文艳. 线性代数应用案例分析[M]. 北京: 科学出版社, 2019.

ISBN: 978-7-03-062134-4.

应用教学案例 14

简单的种群增长问题

生物种群数量变化情况会影响生态平衡.统计、监测某些生物种群数量并研究其变化规律和趋势对于维护生态平衡和保护环境都具有重要的意义.



图 1 猫头鹰和森林鼠

【模型准备】经过统计,某地区猫头鹰和森林鼠的数量具有如下规律:如果没有森林鼠做食物,每个月只有一半的猫头鹰可以存活,如果没有猫头鹰作为捕食者,老鼠的数量每个月会增加 10%.如果老鼠充足(数量为 R),则下个月猫头鹰的数量将会增加 $0.4R$.平均每个月每只猫头鹰的捕食会导致的 104 只老鼠的死亡数.试确定该系统的演化情况.

【模型假设】不考虑其他因素对猫头鹰和森林鼠的数量的影响.

【模型建立】设猫头鹰和森林鼠在时刻 k 的数量为 $x_k = \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$,其中 k 是以月份为单位的时间, O_k 是研究区域中猫头鹰的数量, R_k 是老鼠的数量(单位:千只),则

$$O_{k+1} = 0.5O_k + 0.4R_k$$

$$R_{k+1} = -0.104O_k + 1.1R_k$$

分析 x_k 的变化趋势.

【模型求解】 令 $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -0.104 & 1.1 \end{bmatrix}$, 则得到特征值 $\lambda_1 = 1.02$, $\lambda_2 = 0.58$.

对应的特征向量分别是

$$v_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

初始向量 x_0 可以写成 $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$. 于是, 对于 $k \geq 0$,

$$x_k = c_1 (1.02)^k v_1 + c_2 (0.58)^k v_2 = c_1 (1.02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} + c_2 (0.58)^k \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, $(0.58)^k$ 迅速趋向于零. 所有足够大的 k , 有

$$x_k \approx c_1 (1.02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

k 越大, 近似程度越高, 因此对于充分大的 k ,

$$x_{k+1} \approx c_1 (1.02)^{k+1} \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} = 1.02 x_k. \quad (*)$$

【模型分析】 上而的(*)式表明, 最后猫头鹰和老鼠的数量几乎每个月都近似增加到原来的 1.02 倍, 即有 2% 的月增长率. 而且 O_k 与 R_k 的比值约为 10 比 13, 即每 10 只猫头鹰对应着约 13000 只老鼠.

【模型拓展】 斐波拉契(Fibonacci)兔子问题. 13 世纪初, 欧洲数学家斐波拉契写了一本叫做《算盘书》的著作. 书中有许多有趣的数学题, 其中最有趣的是下面这个题目:

如果一对兔子每月能生 1 对小兔子, 而每对小兔在它出生后的第 3 个月里, 又能开始生 1 对小兔了, 假定在不发生死亡的情况下, 由 1 对初生的兔子开始, 1 年后能繁殖成多少对兔子?

斐波拉契把推算得到的头几个数摆成一串: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

这串数里隐含着一个规律: 从第 3 个数起, 后面的每个数都是它前面那两个数的和. 而根据这个规律推算出来的数, 构成了数学史上一个有名的“斐

波拉契数列这个数列有许多奇特的性质.例如,从第 3 个数起,每个数与它后而那个数的比值,都很接近于 0.618,正好与“黄金分割律”相吻合.

记斐波拉契数列为 $F_1, F_2, F_3, \dots$ 先求矩阵 A 使得 $\begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}$, 再计算出斐波拉契数列的前 20 项, 并计算 $F_3/F_4, F_4/F_5, \dots, F_{19}/F_{20}$.

参考文献

- [1] David C. Lay, 线性代数及其应用, 沈复兴, 傅莺莺等译, 北京: 人民邮电出版社, 2009. 页码: 305.

应用教学案例 15

搜索引擎与网页等级

互联网是人们获取信息的重要渠道,人们常常通过搜索关键词查到所需要的信息.然而包含某个特定关键词的网页往往是数以万计的.例如,包含“线性代数”的页面就有几十万个.我们不可能短时间内逐一阅读这些页面.因此需要一种方法将这些页面按等级排列,使重要的页面排在靠前的位置.为了解决这个问题, Lawrence Page, Sergey Brin, Rajeev Motwani 和 Terry Winograd 在 1998 年提出了一种能够自动判断网页重要性的技术,其关键就是网页等级 (PageRank) 的概念.



图 1 网页搜索

【模型准备】 现有 10 个包含关键词“线性代数”的网页, 其中一些网页链接到另外一些网页上. 已知

$$A = (a_{ij})_{10 \times 10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{有从第} i \text{页面到第} j \text{页面的链接} \\ 0, & \text{无从第} i \text{页面到第} j \text{页面的链接} \end{cases}$$

要求把这 10 个网页按照等级由高到低的次序排列.

【模型建立】 设 $e = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$. 将 A 的第 i 行记作 α_i , 且令 $\beta_i = \frac{1}{\alpha_i e} \alpha_i^T$,

$B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{10})$. 问题转化为求 B 的最大特征值 λ 以及与之对应的特征向量.

【模型求解】 在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>>A=[0,1,0,1,1,0,1,0,1,1;0,0,1,1,1,1,0,1,1,0;
    1,1,0,1,0,1,1,1,0,1;1,1,0,0,1,0,1,1,0,1;
    0,0,1,0,0,0,1,0,0,0;0,1,0,0,0,0,1,0,1,0;
    1,0,0,1,1,1,0,1,0,0;0,0,1,0,0,0,1,0,0,0;
    0,0,0,0,1,1,0,0,0,1;0,0,0,0,0,0,1,1,0,0];
>>e=[1:1:1;1:1:1;1:1:1];
>>b1=A(1,:)/(A(1,:)*e);b2=A(2,:)/(A(2,:)*e);
    b3=A(3,:)/(A(3,:)*e);b4=A(4,:)/(A(4,:)*e);
    b5=A(5,:)/(A(5,:)*e);b6=A(6,:)/(A(6,:)*e);
    b7=A(7,:)/(A(7,:)*e);b8=A(8,:)/(A(8,:)*e);
    b9=A(9,:)/(A(9,:)*e);b10=A(10,:)/(A(10,:)*e);
>>B=[b1;b2;b3;b4;b5;b6;b7;b8;b9;b10]';
>>[P,D] = eig(B);
>>MaxEig = max(abs(diag(D)));
>>EigenVector = P(:,find(abs(diag(D))==MaxEig));
```

```
>>PageRank = abs(EigenVector./norm(EigenVector,1);
>>[Y,I]= sortrows(PageRank);
>>J= fliplr(I');
>>MaxEig,PageRank,J
```

Matlab 执行后得

```
MaxEig =
    1
PageRank =
    0.0730
    0.0755
    0.1208
    0.0838
    0.1053
    0.0961
    0.2091
    0.1111
    0.0741
    0.0509
```

```
J =
    7     3     8     5     6     4     2     9     1    10
```

可见这 10 个网页按等级由高到低的次序排列依次 7,3,8,5,6,4,2,9,1,10.

【模型分析】若用 n_j 表示链接指向第 j 个网页的数目，则

$$n_7 = 7, n_3 = 3, n_8 = 5, n_5 = 5, n_6 = 4, n_4 = 4, n_2 = 4, n_9 = 4, n_1 = 3, n_{10} = 3.$$

可见链接指向第 7 个网页的数目最多，结果将第 7 个网页排在最前面是合理的. 虽然 $n_3 < n_8 = n_5$, 但链接指向第 3 个网页的有第 2、第 5 和第 8 个网页，这就提高了第 3 个网页的等级，因而第 3 个网页排到了第 8 个网页的前面.

参考文献

[1] Lawrence Page, Sergey Brin, Rajeev Motwani. Terry Winograd, The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web. 1998.

<http://www-db.stanford.edu/~backrub/pageranksub.ps>

[2] Taher H. Haveliwala, Efficient Computation of Page Rank, Stanford Technical Report, 1999.

<http://dbpubs.Stanford.edu:8090/pub/l 999-31>

[3] http://www.t086.com/good/pagerank_cn.htm.

应用教学案例 16

市政建设优化问题

市政道路和公园绿化是城市建设的重要组成部分,直接影响城市的功能和市民的幸福。但城市建设往往受到自然资源、财政能力等各种因素的制约,如何对道路建设和公园绿化进行合理规划,是城市管理者需要面对的重要课题。



图 1 市政道路和公路绿化

【模型准备】某市计划修筑长度为 x 公里的公共道路和面积为 y 平方公里的公园和绿地。假设同时进行两个项目比只进行一个项目更具有成本效益,由于受到投资额度的限制, x 和 y 满足约束条件 $4x^2 + 9y^2 \leq 36$, 请问市政府该如何确定这两个项目的建设规模,才能使市民感知的效用价值最大?

效用函数是用来表示消费者在消费中所获得的效用与所消费的商品组合之间数量关系的函数。经济学家有时采用

$$q(x, y) = xy$$

作为效用函数。曲线 $q(x, y) = C$ (C 为常数) 称为无差异曲线 (图 2)。对于市民来说, 无差异曲线上的每个点对应的市政工程建设计划具有相同的价值。

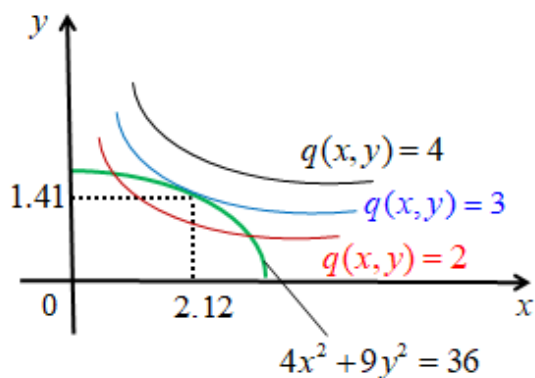


图2 无差异曲线

【模型建立】 由于 x 和 y 满足约束条件 $4x^2 + 9y^2 \leq 36$ ，可行域（图3）上的每个点 (x, y) 表示一个可行的市政工程建设计划，约束曲线 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 上的点 (x, y) 表示资源利用最大化。综上分析，可建立如下数学模型

$$\max_{4x^2 + 9y^2 \leq 36} q(x, y).$$

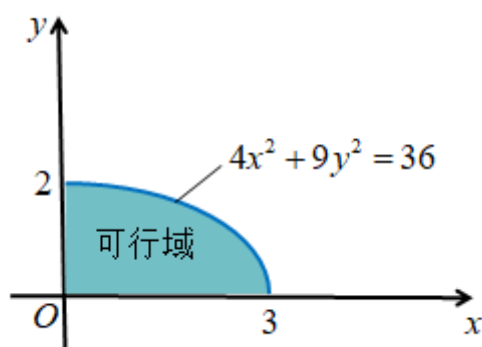


图3 可行域

【模型分析】 将 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 变形，得 $(\frac{x}{3})^2 + (\frac{y}{2})^2 = 1$ 。令 $x_1 = \frac{x}{3}$ ，

$y_1 = \frac{y}{2}$ ，则 $x_1^2 + y_1^2 = 1$ 。因此，效用函数

$$q(x, y) = q(3x_1, 2y_1) = 6x_1y_1 = X^T A X,$$

其中

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, 问题转化为, 当 $X^T X = 1$ 时, 求二次型 $Q(X) = X^T A X$ 的最大值。

【几何描述】 函数 $Q(X) = X^T A X$ 的图形是空间一曲面, 而方程 $X^T X = 1$ 表示一圆柱面。从几何角度看, 在 $X^T X = 1$ 时, 求 $Q(X) = X^T A X$ 的最大值、最小值, 就是求截面曲线上最高点和最低点的位置 (图 4)。

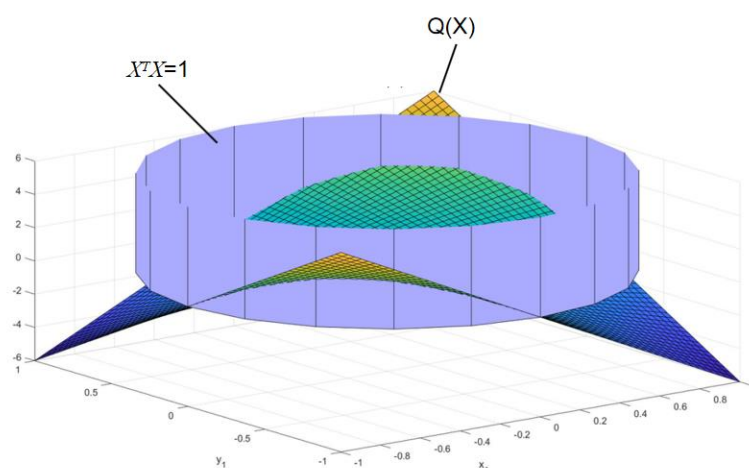


图 4 目标函数的截面曲线

【模型求解】 如何求截面曲线上最高点和最低点的位置?

引理 设 A 是对称矩阵, 令 $m = \min\{X^T A X : \|X\| = 1\}$, $M = \max\{X^T A X : \|X\| = 1\}$, 那么 M 是 A 的最大特征值, m 是 A 的最小特征值。

由引理, 当 $X^T X = 1$ 时, 求二次型 $Q(X) = X^T A X$ 的最大值问题, 即为求矩阵 A 的最大特征值, 由此可得最优化问题的解。

对于矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, 根据正交变换求二次型的标准形, 可计算

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$, 它们对应的单位特征向量分别为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

于是, $Q(X) = q(3x_1, 2y_1)$ 的最大值为 3, 最大值点 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

因此 $x = 3x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2.12$, $y = 2y_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \approx 1.41$ 。

参考文献

- [1] 黄廷祝. 线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021. ISBN: 978-7-04-055831-9.
- [2] 吴丽萍. 求二次型最大、最小值方法初探[J]. 吉林工程技术师范学院学报, 2008, 24(11).

应用教学案例 17

垄断商的最大利润

垄断，是一个经济学术语，政治经济学书上指少数资本主义企业凭借其控制的巨额资本，足够的生产经营规模 and 市场份额，通过协定、同盟、联合、参股等方法，操纵与控制一个或几个部门的商品生产或流通，以获取高额利润。



图 1 垄断解释图

【模型准备】给定三个有一定需求关系的市场，它们由一个垄断者供货，三个对应的需求函数分别为

$$\begin{cases} d_1 = 14 - 2a_1 - a_2 - a_3 \\ d_2 = 24 - 2a_1 - 4a_2 - 2a_3, \\ d_3 = 36 - 2a_1 - 4a_2 - 6a_3 \end{cases}$$

成本函数为 $C = 3 + 2(a_1 + a_2 + a_3)$,

当三个市场的供应量分别为多少时，可使垄断商的利润最大？

【模型分析】设三个市场的供应量分别为 a_1, a_2, a_3 ，要求何时能得到最大利润，首先要列出利润函数，然后求出函数取得最大值的点。

【模型建立与求解】三个市场的总利润为

$$P = d_1 a_1 + d_2 a_2 + d_3 a_3 - C$$

$$= -2a_1^2 - 3a_1 a_2 - 4a_2^2 - 3a_1 a_3 - 6a_3^2 - 6a_2 a_3 + 12a_1 + 22a_2 + 34a_3 - 3$$

则有

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial a_1} = -4a_1 - 3a_2 - 3a_3 + 12 = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial a_2} = -3a_1 - 8a_2 - 6a_3 + 22 = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial a_3} = -3a_1 - 6a_2 - 12a_3 + 34 = 0 \end{cases}$$

解得

$$(a_1, a_2, a_3)^T = \left(\frac{5}{7}, \frac{11}{14}, \frac{95}{42} \right).$$

又因为

$$A = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \bigg|_{\left(\frac{5}{7}, \frac{11}{14}, \frac{95}{42} \right)} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ -3 & -8 & -6 \\ -3 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

是负定的, 故 $\left(\frac{5}{7}, \frac{11}{14}, \frac{95}{42} \right)$ 为极大值点, 而该点又是利润函数的唯一驻

点, 则也是最大值点. 因此, 三个供应量分别为 $a_1 = \frac{5}{7}, a_2 = \frac{11}{14}, a_3 = \frac{95}{42}$

时, 垄断商的利润达到最大.

【结论】该实际问题本身, 是借助高等数学中求最值的方法来进行建模的, 但是利用二次型的正定性可以简单直观的判断多元二次函数的极值, 继而可以求解二次函数的最值。

参考文献

[1] 郭文艳. 线性代数应用案例分析[M]. 北京: 科学出版社, 2019.

ISBN: 978-7-03-062134-4.

应用教学案例 18

二次曲面（线）类型的判定

17 世纪以来，由于航海、天文、力学、经济、军事、生产的发展，以及初等几何和初等代数的迅速发展，促进了解析几何的建立。解析几何的建立第一次真正实现了几何方法与代数方法的结合，使形与数统一起来，这是数学发展史上的一次重大突破。而二次曲面（线）是解析几何中重要的组成部分，随着科学技术的日新月异，二次曲面（线）及其化简很有实用价值。我们既可以利用解析几何的二次曲线化简思路，也可以利用线性代数中的二次型化简的思路来达到目的。二次型理论本身就源于解析几何中化二次曲面（线）方程为标准方程的问题，下面我们以二次曲面为例，了解其实际应用过程和思路。

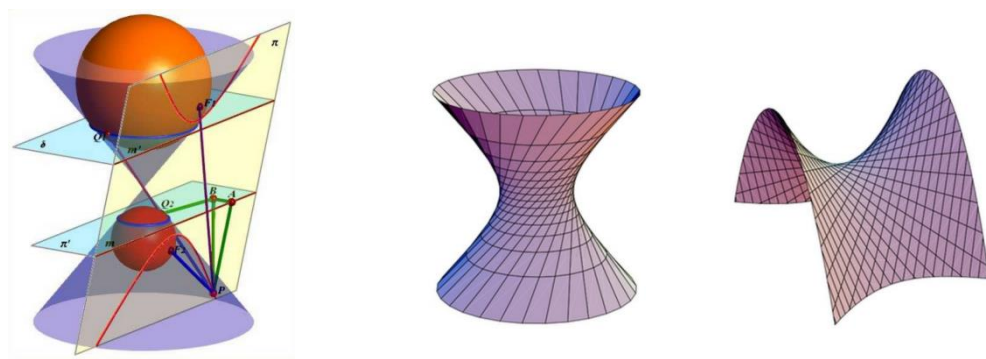


图 1 二次曲面

【模型准备】 讨论二次曲面方程

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5.3 = 0$$

所代表的曲面图形。

【模型分析】 二次曲面的一般方程为

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0 \quad (1)$$

可简写成 $x^T Ax + B^T x + c = 0$, 其中 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$.

先利用正交变换将方程(1)化简为

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 + c = 0 \quad (2)$$

再利用平移变换（通常是用配方法）将方程(2)进一步化简为

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = d \quad (3)$$

然后根据方程(3)就可以判定二次曲面的类型.

【模型求解】 记 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, 则有

$$f = x^T Ax + 2B^T x + 5.3 = 0.$$

因矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$, 对应的单位特征向量分别为

$$\xi_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

于是得正交矩阵 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 使 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda$.

因此, 作正交变换 $x = Qy$, 二次曲面方程化为

$$f = x^T Ax + 2B^T x + 5.3 = y^T Q^T A Q y + 2B^T Q y + 5.3 = y^T \Lambda y + 2B^T Q y + 5.3 = 0, \quad \text{即}$$

$$f = 5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 - 4y_1 - 6y_2 + 2y_3 + 5.3 = 0$$

进而利用配方法可得 $f = 5\left(y_1 - \frac{2}{5}\right)^2 + 2\left(y_2 - \frac{3}{2}\right)^2 - (y_3 - 1)^2 + 1 = 0$.

再作平移变换：
$$\begin{cases} z_1 = y_1 - \frac{2}{5}, \\ z_2 = y_2 - \frac{3}{2}, \\ z_3 = y_3 - 1, \end{cases}$$
 则有 $f = 5z_1^2 + 2z_2^2 - z_3^2 + 1 = 0$ ，从而二次曲面

的方程化为 $-5z_1^2 - 2z_2^2 + z_3^2 = 1$ ，它表示空间中的一个双叶双曲面.

【结论】正交变换不会改变向量的大小，因此空间几何体由向量表示后作正交变换不会改变几何体的形状，故用正交变换简化方程的同时可以判断曲面（线）的类型.

参考文献

- [1] 郭文艳. 线性代数应用案例分析[M]. 北京：科学出版社，2019.
ISBN: 978-7-03-062134-4.
- [2] 宋叔尼等. 线性代数及其应用[M]. 北京：高等教育出版社，2020.
ISBN: 978-7-04-053411-5.